تقدیر و تشکر

سپاس خداوند بخشنده و مهربان را می گویم که به این بندۀ حقیر توفیق کسب قطره‌ای از دریای بی کران علمش را عطا فرمود.

از دکتر علیرضا مدقالچی به خاطر راهنمایهای ارزنده‌شان در طول مدت تحصیلم نهایت تشکر را دارم و از درگاه خداوند برای ایشان بهترینها را آرزومندم.

از دوستانم، آقایان مهندس علی میر عربی، مهندس نادر چنانی و جناب آقای دکتر محمد هادی مدرسی که در طول مدت تحصیلم از بهترین همراهان من بودند سپاسگزارم.

از سرکار خانم رحیمی، کتابدار محترم دانشکدۀ ریاضی در حصارک کرج نیز به خاطر همکاریهایشان کمال تشکر را دارم، به امید موفقیتهای روز افزون برای ایشان.

چکیده

این پایان نامه براساس مقالهٔ زیر می باشد

F.Ghahramani,R.J.Loy ,Generalized notion of amenability.

J.Funct.Anal.208(2004) 229-260.

در این پایان نامه ما مفهوم میانگین پذیری تقریبی، انقباض پذیری و روابط موجود بین شان را بررسی می کنیم.

واژه‌های کلیدی

جبر باناخ میانگین پذیر، جبر باناخ تقریباً میانگین پذیر، همانی تقریبی، مشتق.

پیشگفتار

این پایان نامه شامل هفت فصل می باشد.

فصل اول شامل تعریف اصلی این پایان نامه یعنی مفهوم میانگین پذیری می باشد، همچنین در این فصل مختصری دربارهٔ نحوهٔ ساخته شدن فضای حاصلضربی تانسوری دو جبر باناخ توضیح می دهیم.

فصل دوم یکی از مهمترین نتایج تعریف مفهوم میانگین پذیری تقریبی را نشان می دهد. در این فصل نشان داده‌ایم که اگر از مفهوم میانگین پذیری تقریبی استفاده کنیم دو ردهٔ جبرهای باناخ میانگین پذیر تقریبی و انقباض پذیر تقریبی با هم، هم‌ارز می شوند.

فصل سوم نیز به معادل شدن یک مفهوم جدید با میانگین پذیری می پردازد.

در فصل چهارم به تعریف فضای باناخ دنباله‌ای و نحوهٔ وارد شدن مفهوم تقریبی به این نوع از جبرهای باناخ می پردازیم.

در فصل پنجم توصیفی از جبرهای باناخ میانگین(انقباض)پذیر تقریبی کراندار را بیان می‌کنیم و در فصل ششم به تعمیم چند قضیه از [12]

و نیز بیان شرایطی برای اینکه یک جبر باناخ میانگین پذیر تقریبی دارای یک همانی تقریبی دو طرفه باشد می پردازیم.

در خاتمه نیز در بخش پیوست به ترتیب واژه‌نامه و فهرست مراجع گنجانده شده است .

برای تدوین این پایان نامه از مقالهٔ

F.Ghahramani, R.J.Loy, Y.Zhang, Generalized notion of amenability, part 2, Journal of Functional Analysis, 254(2008)1776-1810.

استفاده شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ تعریف. فضای برداری A روی میدان F را یک جبر می نامیم هرگاه نگاشت دو خطی $\pi : A \times A \to A$ موجود باشد که $\pi(a,b) = a.b$ و برای هر a,b و c متعلق به A و λ متعلق به F دارای خواص زیر باشد:

(۱). $\mathrm{a.(b.c)=(a.b).c}$

(۲). $\mathrm{(a+b).c=a.c+b.c}$, $\mathrm{a.(b+c)=a.b+a.c}$

(۳). $(\lambda.\mathrm{a}).\mathrm{b}=\lambda.(\mathrm{a.b})=\mathrm{a}.(\lambda.\mathrm{b})$

۲.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باشد. نرم p روی A را یک نرم جبری گوئیم، هرگاه به ازای هر a و b متعلق به A داشته باشیم :

$$p(a.b) \leqslant p(a)p(b)$$

جبر A را همراه با نرم p یک جبر نرمدار گوئیم. جبر نرمدار A را یک جبر باناخ می نامیم اگر فضای A با نرم p کامل باشد.

۳.۱ تعریف. همریختی جبری φ از جبر A به جبر B یک نگاشت خطی است بطوری که : $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ $(\text{x,y}\in A)$

یعنی φ از جبر A به جبر B یک نگاشت خطی وضربی است.

هرگاه $B = C$ (C میدان اعداد مختلط)باشد، یعنی $\varphi : A \to C$ آنگاه φ را یک همریختی مختلط می گوئیم.

۴.۱ قضیه. فرض کنیم φ یک همریختی مختلط روی جبر A باشد در این صورت φ پیوسته است و $\|\varphi\| \leqslant ۱$ و برای هر x متعلق به A با شرط$\|x\| \leqslant ۱$ ، $e - x$ یک عضو وارونپذیر از A می باشد(e عضو همانی A می باشد).

برهان. قضیه ۱۰—۷ از [23]. □

۵.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ بدون واحد روی میدان C باشد. مجموعه $\tilde{A} = \{(a,\lambda)\colon\ a\in A,\lambda\in F\}$ با نرم و جمع و ضرب زیر به یک جبر واحد دار روی میدان F با همانی (۱،۰) می شود:

$$\|(a,\lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$$

$$(a_۱,\lambda_۱) + (a_۲,\lambda_۲) = (a_۱ + a_۲,\lambda_۱+\lambda_۲)$$

$$(a_۱,\lambda_۱).(a_۲,\lambda_۲) = (a_۱.a_۲+\lambda_۲.a_۱+\lambda_۱.a_۲,\lambda_۱.\lambda_۲)$$

که $a_۱, a_۲ \in A$ و$\lambda_۱,\lambda_۲ \in F$ می باشند.

$\tilde{A}$ بانرم، جمع و ضرب تعریف شده در بالا یک جبر باناخ واحد دار است. [23].

۶.۱ نماد گذاری. اگر A واحد دار باشد $A^\sharp := A$ و اگرA بدون واحد باشد$A^\sharp :=\tilde{A}$. در هر حال عضو همانی $A^\sharp$ را با علامت e_A نشان می دهیم .

۷.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر روی میدان F و E یک فضای برداری روی میدان F باشد. گوئیم E یک $A-$ مدول چپ است هرگاه نگاشت دو خطی $(a,x) \to a.x$ از $A \times E$ به E موجود باشد بقسمی که:

$$a.(b.x) = (ab).x \qquad (a,b \in A, x \in E)$$

به همین ترتیب فضای برداری E را یک $A-$ مدول راست گوئیم هرگاه نگاشت دو خطی $(a,x) \to x.a$ از $A \times E$ به E موجود باشد بقسمی که:

$$(x.a).b = x.(ab) \qquad (a,b \in A, x \in E)$$

فضای برداری E را یک $A-$ مدول دو طرفه گوئیم هرگاه هم $A-$ مدول چپ و $A-$ مدول راست باشد و ضرب مدولی دارای خاصیت زیر باشد:

$$(a.x).b = a.(x.b) \qquad (a,b \in A, x \in E)$$

۸.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ است. فضای باناخ E را که یک $A-$ مدول چپ نیز باشد یک باناخ $A-$ مدول چپ می نامیم اگر $K > \circ$ ای موجود باشد بقسمی که:

$$\|a.x\| \leqslant K\|a\|\|x\| \qquad (a \in A, x \in E)$$

فضای باناخ E را که یک $A-$ مدول دوطرفه باشد یک باناخ $A-$ مدول دوطرفه می نامیم اگر $K > \circ$ موجود باشد بقسمی که:

$$\|a.x\| \leqslant K\|a\|\|x\| \text{ و } \|x.a\| \leqslant K\|a\|\|x\| \qquad (a \in A, x \in E)$$

۹.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبرو E یک $A-$ مدول دوطرفه است E جابجایی (متقارن) نامیده می شود اگر $a.x = x.a$ برای a متعلق به A و x متعلق به E.

۱۰.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر نرمدار است ،تور $(e_i)_{i\in I}$، در A را یک همانی تقریبی چپ برای A گویند اگر برای هر a متعلق به A،

$$\lim_i e_i a = a$$

که حد در نرم جبر A گرفته می شود.

به همین تر تیب تور $(e_i)_{i\in I}$ را یک همانی تقریبی راست برای A گویند اگر برای هر a متعلق به A،

$$\lim_i a e_i = a$$

تور $(e_i)_{i\in I}$ را یک همانی تقریبی برای A گوئیم اگر همانی تقریبی چپ و راست باشد.

تور $(e_i)_{i\in I}$ را یک همانی تقریبی کراندار برای A گوئیم اگر علاوه بر همانی تقریبی چپ و راست بودن شرط $\sup_i \|e_i\| < \infty$ را نیز دارا باشد.

۱۱.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باشد. عضو x متعلق به A را خود توان گوئیم اگر $x^۲ = x.x = x$.

۱۲.۱ قضیه (مزور)[۱] . فرض کنیم A یک فضای باناخ و E یک زیر مجموعه محدب از A است. بست E در $(A,\|.\|)$ و بست ضعیف E با هم برابرند.

برهان. [۲۳]. □

۱۳.۱ تعریف. فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ روی میدان F و X^*, Y^* به ترتیب فضاهای دوگان آنها باشند. برای x متعلق به X و y متعلق به Y ، $x\otimes y$ را به

[۱] $Mazur$

عنوان عضوی از $BL(X^* \times Y^*, F)$ در نظر می گیریم ($BL(X^* \times Y^*, F)$ فضای تمام نگاشت های دو خطی کراندار از $X^* \times Y^*$ بتوی F می باشد) که به ازای هر f متعلق به X^* و هر g متعلق به Y^* به صورت زیر تعریف می شود:

$$x \otimes y(f,g) := f(x)g(y)$$

حاصلضرب تانسوری X و Y را با $X \otimes Y$ نمایش می دهیم و آن را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$X \otimes Y = linear\ span\{x \otimes y : x \in X, y \in Y\}$$

یعنی $X \otimes Y$ زیر فضای خطی تولید شده در $BL(X^* \times Y^*, F)$ بوسیله اعضای $x \otimes y$ است که x متعلق به X و y متعلق به Y می باشد.

حال با استفاده از نرم فضاهای X و Y فضای $X \otimes Y$ را به یک فضای نرمدار تبدیل می کنیم.

نرم، $\|.\|_\pi : X \otimes Y \to R$ را با تعریف زیر نرم تانسوری تصویری روی $X \otimes Y$ می نامیم:

$$\|u\|_\pi := \inf\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, n \in N\}$$

توجه کنید که $\|x \otimes y\|_\pi = \|x\|\|y\|$.

تکمیل شده فضای نرمدار($X \otimes Y$,$\|.\|_\pi$) در $BL(X^* \times Y^*, F)$ را حاصلضرب تانسوری تصویری X و Y گوئیم و آن را بصورت $X \hat{\otimes} Y$ نمایش می دهیم.

در واقع از دو فضای باناخ X و Y یک فضای باناخ جدید $X \hat{\otimes} Y$ ساختیم.

حال قضیه زیر ماهیت عناصر $X \hat{\otimes} Y$ را نشان می دهد.

۱۴.۱ قضیه. $X \hat{\otimes} Y$ زیر فضایی از $BL(X^* \times Y^*, F)$ شامل عناصری به فرم $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i$ است که $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| < \infty$ و x_i عضو X و y_i عضو Y است و داریم:

$$\|u\|_\pi := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i\}$$

برهان . [1]. $\square$

حال روی فضای $X \hat{\otimes} Y$ یک ضرب تعریف می کنیم و ثابت می کنیم که با این ضرب و نرم $\|.\|_\pi$، $X \hat{\otimes} Y$ یک جبر باناخ است. ضرب را این گونه تعریف می کنیم:

$$(x_1 \otimes y_1).(x_2 \otimes y_2) = (x_1.x_2) \otimes (y_1.y_2) \qquad (\mathrm{x}_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y)$$

حال فرض کنیم u و v دو عضو دلخواه از فضای $X \hat{\otimes} Y$ است که $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ و $v = \sum_{j=1}^{m} x'_j \otimes y'_j$ داریم:

$$u.v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i x'_j \otimes y_i y'_j$$

اما داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \|x_i x'_j\| \|y_i y'_j\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| \sum_{j=1}^{m} \|x'_j\| \|y'_j\|$$

حال با گرفتن inf روی مجموع های متناهی بدست می آوریم:

$$\|u.v\|_\pi \leqslant \|u\|_\pi \|v\|_\pi$$

۱۵.۱ قضیه. فرض کنیم X و Y جبرهای نرمدار باشند. نرم $\|.\|_\pi$ روی جبر $X \otimes Y$ نرم جبری است و $X \hat{\otimes} Y$ یک جبر باناخ است.

برهان . [1]. $\square$

۱۶.۱ قضیه (گلدشتاین)[۲] . فرض کنیم A یک فضای باناخ است. برای هر α از A^{**} تور (x_i) در A با خواص زیر موجود است:

(۱). برای هر i داریم، $\|x_i\| \leqslant \|\alpha\|$.

(۲). $\hat{x}_i \to \alpha$ با توپولوژی ω^*.

در واقع قضیهٔ گلدشتاین بیان می کند که A در A^{**} با توپولوژی ω^* چگال است.

۱۷.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک $A-$ مدول دو طرفه باناخ است. نگاشت خطی $D : A \to X$ را بقسمی که:

$$D(ab) = a.D(b) + D(a).b \qquad (\text{a,b}\in A)$$

یک مشتق می نامیم. توجه کنید که در طول کار D را یک نگاشت پیو سته در نظر می گیریم مگر در جایی که خلاف آن بیان شده است.

۱۸.۱ نکته. از روی تعریف مشتق بالا علت اینکه ما به X یک ساختار $A-$ مدولی می دهیم این است که، نگاشت D که در شرط لایپ نیتز صدق می کند، خوش تعریف شود. یعنی چون $a.D(b)$ و$D(a).b$ هر دو متعلق به X هستند (X یک $A-$ مدول دو طرفه‌است) پس $D(ab)$ عضو X است.

۱۹.۱ نماد گذاری. برای هر x عضو X (X یک $A-$ مدول دو طرفه باناخ است) $ad_x : A \to X$ را با ضابطه $a \to a.x - x.a$ در نظر می گیریم.حال نشان می دهیم که در شرط لایپ نیتز نیز صدق می کند:

$$ad_x(ab) = (ab).x - x.(ab) = (ab).x - a.x.b + a.x.b - x.(ab)$$

[۲] $Goldstein$

$$= a.(b.x - x.b) + (a.x - x.a).b$$

$$= a.ad_x(b) + ad_x(a).b \qquad (\text{a,b}\in A, x \in X)$$

پس ad_x یک مشتق است. ad_x را مشتق درونی القا شده بوسیله x می نامیم.

۲۰.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک $A -$ مدول دو طرفه باناخ است. مشتق $D : A \to X$ را تقریباً درونی می نامیم اگر تور (x_i) در X موجود باشد بقسمی که برای هر a از A :

$$D(a) = \|.\| - \lim_i (a.x_i - x_i.a)$$

یا اگر بخواهیم بوسیله نگاشتهای درونی حد بالا را نمایش دهیم می نویسیم $D = \lim_i ad_{x_i}$.

۲۱.۱ نکته. فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک $A -$ مدول دو طرفه باناخ و X^* فضای دوگان X است. با استفاده از ضرب مدولی A روی X، X^* را نیز تبدیل به یک $A -$ مدول دو طرفه باناخ می کنیم.تعریف می کنیم:

$$(a.f)(x) := f(x.a) \qquad (a \in A, f \in X^*, X \in X)$$

$$(f.a)(x) := f(a.x) \qquad (a \in A, f \in X^*, X \in X)$$

با تعریف $(a.f)$ و$(f.a)$ به صورت بالا، X^* نیز تبدیل به یک $A -$ مدول دو طرفه باناخ می شود. جزئیات تعریف ضرب فوق در[2] به طور کامل بحث شده است.

برای ساختن یک ساختار $A -$ مدول دو طرفه باناخ روی X در ۸.۱ ثابتی را وابسته به ضرب عناصر A در X کردیم ،علت این امر این است که با این شرط $a.f$ و $f.a$ هر دو متعلق به X^* می شوند، چون داریم:

$$\|a.f\| = \sup_{\|x\|\leqslant ۱} \|(a.f)(x)\| \leqslant \|(a.f)(x)\| = \|f(x.a)\| \leqslant \|f\|\|x.a\|$$

حال چون $\|x.a\| \leqslant K\|x\|\|a\|$ پس داریم:

$$\|a.f\| \leqslant K\|x\|\|a\|$$

پس $a.f$ کراندار است پس عضو X^* است.به همین ترتیب در مورد $f.a$.

۲۲.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ است.

جبر باناخ A را میانگین پذیر گوئیم اگر برای هر $A-$ مدول دو طرفه باناخ مثل X، هر مشتق $D: A \to X^*$ درونی باشد، یعنی $\exists \xi \in X^*$ بقسمی که $D = ad_\xi$، یعنی برای هر $a \in A$ داریم:

$$D(a) = a.\xi - \xi.a$$

با تعمیم مفهوم میانگین پذیری به تعریف میانگین پذیری تقریبی می رسیم.

۲۳.۱ تعریف. جبر باناخ A رامیانگین پذیر تقریبی گوئیم اگر برای هر $A -$ مدول دو طرفه باناخ مثل X هر مشتق $D: A \to X^*$ تقریبا درونی باشد، یعنی تور (ξ_i) در X^* موجود باشد که

$$D(a) = \|.\|_{X^*} - \lim_i ad_{\xi_i}(a)$$

جبر باناخ A را بطور دنباله ای میانگین پذیر تقریبی گوئیم اگر برای هر $A -$ مدول دو طرفه باناخ مثل X و هر مشتق $D: A \to X^*$ دنباله (ξ_i) در X موجود باشد بقسمی که $D = \lim_i ad_{\xi_i}$.

به وضوح هر جبر باناخ میانگین پذیر، میانگین پذیر تقریبی است. ولی در حالت کلی عکس این مطلب برقرار نیست. برای دیدن مثالهایی در این زمینه به [12] و [14] مراجعه

فرمائید.

۲۴.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ است.

جبر باناخ A را انقباض پذیر می نامیم اگر برای هر $A-$ مدول دو طرفه باناخ مثل X، هر مشتق $D: A \to X$ درونی باشد، و جبر باناخ A را انقباض پذیرتقریبی گوئیم اگر برای هر $A-$ مدول دو طرفه باناخ مثل X، هر مشتق $D: A \to X$ تقریبا درونی باشد. همان طور که از تعاریف بالا مشاهده می کنیم هر جبر باناخ تقریبا انقباض پذیر، تقریبا میانگین پذیر است، چون X^* دارای ساختار مدولی دو طرفه است.

۲۵.۱ نکته. اگر قبل از نماد $\lim_i$ در $D(a) = \lim_i ad_{\xi_i}(a)$، نماد ω^* قرار گیرد، یعنی $D(a) = \omega^* - \lim_i ad_{\xi_i}(a)$، منظور این است که همگرایی در توپولوژی ω^* از X^* است.

۲۶.۱ نکته. در طول این پایان نامه دوگان دوم جبر باناخ A را با A^{**} نمایش داده و A^{**} را با ضرب اول (ضرب چپ) آرنز[۳] در نظر می گیریم. جزئیات ویژگیهای ضربهای آرنز در [2] آمده است.

[۳] $Arens$

فصل ۲

یک هم ارزی مفید

مفهوم میانگین پذیری و انقباض پذیری تقریبی توسط قهرمانی و لوی در [12] مطرح شد. یکی از مهمترین نتایج این مقا له هم ارزی این دو رده جدید از جبرهای باناخ است که در این فصل به تشریح آن می پردازیم.

۱.۲ قضیه. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد، در این صورت A میانگین پذیر تقریبی است اگر و تنها اگر یکی از دو شرط هم ارز زیر برقرار باشند:

(۱). تور (M_v) در $(A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp)^{**}$ موجود باشد بقسمی که برای هر a از $A^\sharp$:

$a.M_v - M_v.a \to 0$ و $\pi^{**}(M_v) \to e$.

(۲). تور (M'_v) در $(A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp)^{**}$ موجود باشد بقسمی که برای هر a از $A^\sharp$:

$a.M'_v - M'_v.a \to 0$ و $\pi^{**}(M'_v) = e$.

البته توجه کنید که در اینجا همگرایی با نرم است و اگر A بطور ω^* — تقریباً میانگین پذیر باشد همگرایی های بالا در توپولوژی ω^* می باشد.

برهان . [12] . □

۲.۲ نکته. نگاشت $\pi: A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp \to A^\sharp$ با ضابطه $a\otimes b \to a.b$ نگاشت ضرب نامیده می شود و π^{**} را نگاشت از $(A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp)^{**}$ به A^{**} در نظر می گیریم. چون طبق قضیه گلدشتاین $A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp$ در $(A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp)^{**}$ با توپولوژی ω^* چگال است و چون π^{**} نگاشت حاصل از توسیع π می باشد، پس π^{**} بطور ω^* — پیوسته است.

۳.۲ قضیه. فرض کنیم A یک جبر باناخ است، در این صورت A انقباض پذیر تقریبی است اگر و تنها اگر هر یکی از دو شرط هم ارز زیر برقرار باشند:

(۱). تور(M_v) در $A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp$ موجود باشد بقسمی که برای هر a از $A^\sharp$:

$a.M_v - M_v.a \to \circ$ و $\pi(M_v) \to e$.

(۲). تور(M'_v) در $A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp$ موجود باشد بقسمی که برای هر a از $A^\sharp$:

$a.M'_v - M'_v.a \to \circ$ و $\pi(M'_v) = e$.

(۳). تورهای (M''_v) در $A\hat{\otimes}A$ و(F_v) و(G_v) در A موجود باشند بقسمی که برای هر a از A داریم:

(آ). $a.M''_v - M''_v.a + F_v\otimes a - a\otimes G_v \to \circ$.

(ب). $a.F_v \to a$ و $G_v.a \to a$.

(پ). $\pi(M''_v).a - F_v.a - G_v.a \to \circ$.

برهان . [12]. □

۴.۲ قضیه. فرض کنیم A یک جبر باناخ است، در این صورت A (تقریباً) میانگین پذیر است اگر و تنها اگر $A^\sharp$ (تقریباً) میانگین پذیر باشد.

برهان . [12]. $\square$

حال با بیان این مقدمات و ملزومات به بیان و اثبات هم ارزی اصلی این فصل می پر دازیم:

۵.۲ قضیه. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. گزاره های زیر هم ارزند:

(۱). A انقباض پذیر تقریبی است.

(۲). A میانگین پذیر تقریبی است.

(۳). A، ω^* — میانگین پذیر تقریبی است.

برهان. چون برای هر A — مدول دو طرفه باناخ مثل X، X^* (دوگان X) نیز یک A — مدول دو طرفه باناخ است (۱) به (۲) اثبات می شود. اثبات (۲) به (۳) نیز چون توپولوژی ω^* از توپولوژی نرم ضعیفتر است، بدیهی می باشد. پس برای کامل شدن (۳) به (۱) را نشان می دهیم.

فرض کنیم که (۳) برقرار باشد. طبق قضیه ۴.۲، $A^\sharp$ نیز بطور ω^* — میانگین پذیر تقریبی است. حال با توجه به قضیه ۱.۲ تور (M_v) در $(A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp)^{**}$ موجود است

بقسمی که برای هر a از $A^\sharp$ $a.M_v - M_v.a \to 0$ و $\pi^{**}(M_v) \to e$ به ترتیب در توپولوژی ω^* از $A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp$ و A^{**}.

حال فرض کنیم $\epsilon > 0$ اختیار شده است. با توجه به اینکه عناصر پایه توپولوژی ω^*، بوسیله یک تعداد متناهی از عناصر تولید می شود، مجموعه های متناهی F از $A^\sharp$ و Φ از $(A^\sharp)^*$ و N از $(A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp)^*$ را اختیار می کنیم.

چون $a.M_v - M_v.a \to 0$ با توپولوژی ω^*، پس v ای وجود دارد بقسمی که:

$$| < a.f - f.a, M_v > | = | < f, a.M_v - M_v.a > | < \epsilon$$

و نیز چون $\pi^{**}(M_v) \to e$ با توپولوژی ω^* پس در اینجا نیز v ای وجود دارد بقسمی که:

$$| < \phi, \pi^{**}(M_v) - e > | < \epsilon$$

دو نامعادله بالا به ازای هر a از F وهر ϕ از Φ و هر f از N برقرار است.

طبق قضیه گلدشتاین برای هر v، تور (m_i^v) از $A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp$ وجود دارد

بقسمی که $\hat{m_i^v} \to M_v$ با توپولوژی ω^*، پس به ازای اندیس مناسب i داریم:

$$| < a.f - f.a, M_v > - < a.f - f.a, m_i^v > | < \epsilon$$

و چون خود $| < a.f - f.a, M_v > |$ از ϵ کوچکتر است بنابراین

$$| < f, a.m_i^v - m_i^v.a > | = | < a.f - f.a, m_i^v > | < \epsilon$$

و نیز چون π^{**}، $\omega^* -$ پیوسته است داریم:

$$| < \phi, \pi(m_i^v) - e > | < \epsilon$$

که دو نامعادله بالا به ازای هر a از F وهر ϕ از Φ و هر f از N برقرار است.

بنابراین از بحث فوق نتیجه می شود که توری مانند (m_λ) از $A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp$ موجود است بقسمی که برای هر a از $A^\sharp$ داریم، $a.m_\lambda - m_\lambda.a \to ۰$ و $\pi(m_\lambda) \to e$ به طور ضعیف و به تر تیب در $A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp$ و $A^\sharp$.

در پایان برای هر مجموعه متناهی F از $A^\sharp$ مثل $F = \{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$ داریم:

$$(a_۱.m_\lambda - m_\lambda.a_۱, a_۲.m_\lambda - m_\lambda.a_۲, ..., a_n.m_\lambda - m_\lambda.a_n, \pi(m_\lambda)) \to (۰, ۰, ..., e)$$

بطور ضعیف در $(A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp)^n \oplus A^\sharp$. بنابراین:

$$(\circ, \circ, ..., e) \in \omega^*{-}cl\{(a_۱.m_\lambda{-}m_\lambda.a_۱, a_۲.m_\lambda{-}m_\lambda.a_۲, ..., a_n.m_\lambda{-}m_\lambda.a_n, \pi(m_\lambda))\}$$

اما چون

$$(\circ, \circ, ..., e) \in \omega^*{-}cl\{(a_۱.m_\lambda{-}m_\lambda.a_۱, a_۲.m_\lambda{-}m_\lambda.a_۲, ..., a_n.m_\lambda{-}m_\lambda.a_n, \pi(m_\lambda))\} \subseteq$$

$$\omega^* - cl, con\{(a_۱.m_\lambda - m_\lambda.a_۱, a_۲.m_\lambda - m_\lambda.a_۲, ..., a_n.m_\lambda - m_\lambda.a_n, \pi(m_\lambda))\}$$

پس $(\circ, \circ, ..., e)$ متعلق است به:

$$\omega^* - cl, con\{(a_۱.m_\lambda - m_\lambda.a_۱, a_۲.m_\lambda - m_\lambda.a_۲, ..., a_n.m_\lambda - m_\lambda.a_n, \pi(m_\lambda))\}$$

حال قضیه‌هان باناخ نتیجه می دهد که برای $\epsilon > \circ$، $u_{\epsilon,F}$ ای عضو $co\{m_\lambda\}$ بقسمی که:

$$\|a.u_{\epsilon,F} - u_{\epsilon,F}.a\| < \epsilon \qquad , \|\pi(u_{\epsilon,F}) - e\| < \epsilon$$

برای هر a متعلق به F. حال با توجه به قضیه ۳.۲، (۱) نتیجه می شود. □

۶.۲ تذکر. طبق تذکر 5.11 از [14] قسمت (b)، برای یک جبر باناخ A دو مفهوم بطور دنباله‌ای میانگین پذیر تقریبی و بطور دنباله‌ای انقباض پذیری تقریبی، هم ارز نمی باشند.

فصل ۳

مفاهیم یکنواخت

۱.۳ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ، X یک $A-$ مدول دو طرفه باناخ و $D : A \to X^*$ یک مشتق پیوسته باشد. A را یک جبر بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر گوئیم اگر D را بتوان بطور یکنواخت روی گوی یکه A تقریب زد. یعنی دنباله (ξ_i) در X^* موجود باشد که برای هر a از گوی یکه A داریم:

$$D(a) = ||.|| - \lim_i ad_{\xi_i}(a)$$

بوضوح هر جبر باناخ میانگین پذیر، بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر است. حال در این فصل به اثبات عکس این مطلب می پردازیم.

۲.۳ قضیه. فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\pi: A^\sharp \hat{\otimes} A^{\sharp op} \to A^\sharp$ نگاشت ضرب باشد($A^{\sharp op}$ همان جبر $A^\sharp$ است با این تفاوت که ضربش برعکس شده، در واقع ضرب در $A^{\sharp op}$ این گونه تعریف می شود، $a.b := ba$، $a.b$ ضرب در $A^{\sharp op}$ را نشان می دهد و ba ضرب در $A^\sharp$) در این صورت A میانگین پذیر است اگر وتنها اگر $K_\circ = ker\pi$ دارای

یک همانی تقریبی راست کراندار باشد.

برهان. [16]، قضیه 2.25 قسمت 6. □

۳.۳ قضیه. جبر باناخ A بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر اگر و تنها اگر میانگین پذیر باشد.

برهان. فرض کنیم A بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر است. بنا بر قضیه ۴.۲ جبر باناخ $A^\sharp$ میانگین پذیر است اگر و تنها اگر A میانگین پذیر باشد. پس بدون از دست دادن کلیت فرض می کنیم A دارای عضو واحد(یکه) است و این عضو را با e نمایش می دهیم.

حال جبر باناخ $A\hat{\otimes}A^{op}$ را با ضرب $(a,b,c,d \in A)$ $\qquad (a\otimes b).(c\otimes d) = ac\otimes bd$ در نظر می گیریم.

فرض کنیم $\pi: A\hat{\otimes}A^{op} \to A$ نگاشت ضرب باشد، بنا بر قضیه ۲.۳ برای میانگین پذیر بودن کافی است ثابت کنیم $K_\circ = ker\pi$ دارای یک همانی تقریبی راست کراندار می باشد یا بطور معادل طبق قضیه 3.33 از [7] و گزاره 4.11 از [1] $K_\circ^{**}$ دارای یک همانی راست باشد.

به ازای هر a,b از A و t عضو $A\hat{\otimes}A^{op}$ بنا بر تعریف ضرب بالا داریم:

$$(a\otimes b).t = a.t.b \qquad (۱)$$

حال طبق ω^*- پیوستگی عمل ضرب(۱) به ازای هر t عضو $(A\hat{\otimes}A^{op})^{**}$ نیز برقرار است. حال فرض می کنیم $t\in K_\circ^{**}$، آنگاه برای $s=\sum_j a_j\otimes b_j \in K_\circ$ داریم:

$\pi(s)=\sum_j a_jb_j = \circ$ و با استفاده از (۱) نتیجه می شود:

$$st - s = \sum_j (a_j \otimes b_j).t - t\sum_j a_j b_j - \sum_j a_j \otimes b_j + e \otimes \sum_j a_j b_j$$

$$= \sum_j (a_j.t - t.a_j - a_j \otimes e + e \otimes a_j).b_j$$

حال از طرفین رابطه بالا نرم می گیریم، بدست می آید:

$$\|st - s\| \leqslant \sum_j \|a_j\|\|b_j\| \sup_{a \in A_1} \|a.t - t.a - a \otimes e + e \otimes a\|$$

که A_1 گوی یکه A است. بنابراین داریم:

$$\|st - s\| \leqslant \|s\| \sup_{a \in A_1} \|a.t - t.a - a \otimes e + e \otimes a\| \qquad (s \in K_0) \qquad (۲)$$

حال $s \in K_0^{**}$ را در نظر می گیریم. طبق قضیه گلدشتاین توری مانند (s_i) در K_0 موجود است بقسمی که $\|s_i\| \leqslant \|s\|$ و $s_i \to s$ با توپولوژی ω^*. بنابراین $s_i t - s_i \to st - s$ با توپولوژی ω^*.

پس برای هر f از K_0^* داریم $|(s_i t - s_i)(f) - (st - s)(f)| < \epsilon$ که با استفاده از خواص قدر مطلق بدست می آید، $|(st - s)(f)| < |(s_i t - s_i)(f)| + \epsilon$ بنابراین:

$$\|st - s\| \leqslant \sup_i \|s_i t - s_i\|$$

پس داریم:

$$\|st - s\| \leqslant \sup_i \|s_i t - s_i\| \leqslant \sup_i \|s_i\| \sup_{a \in A_1} \|a.t - t.a - a \otimes e + e \otimes a\|$$

$$\leqslant \|s\| \sup_{a \in A_1} \|a.t - t.a - a \otimes e + e \otimes a\|$$

پس رابطه (۲) به ازای هر s متعلق به K_0^{**} نیز درست است.

نگاشت $D : A \to K_0^{**}$ با ضابطه $D(a) = a \otimes e - e \otimes a$ یک مشتق پیوسته است.

چون A بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر است بنابراین با توجه به فرض های قضیه دنباله (t_n) در K_0^{**} و همچنین دنباله (ϵ_n) که $\epsilon_n \to 0$ موجودند که:

$$\|a.t_n - t_n.a - a\otimes e + e\otimes a\| \leqslant \epsilon_n\|a\| \qquad (a\in A) \qquad (۳)$$

بنابراین عملگر $\rho_{t_n} : K_\circ^{**} \to K_\circ^{**}$ بنا بر (۲) و (۳) با تعریف $\rho_{t_n}(s) = s.t_n$ در شرط $\|\rho_{t_n} - id_{K_\circ^{**}}\| < ۱$ برای n های بقدر کافی بزرگ صدق می کند.بنا بر قضیه ۴.۱، ρ_{t_n} برای n های بقدر کافی بزرگ وارونپذیر است. پس ρ_{t_n} به ازای n مناسب پوشاست، بنابراین x ای متعلق به $K_\circ^{**}$ وجود دارد بقسمی که $x.t_n = t_n$. حال برای هر y عضو $K_\circ^{**}$ داریم، $y.x.t_n = y.t_n$ که این نیز نتیجه می دهد، $(yx-y)t_n = ۰$.

از خاصیت یک به یک بودن ρ_{t_n} (برای n مناسب) نتیجه می شود که $yx = y$. پس $K_\circ^{**}$ دارای یک همانی راست است. بنابراین A میانگین پذیر است. □

۴.۳ قضیه. جبر باناخ A بطور یکنواخت تقریباً انقباض پذیر است اگر وتنها اگر انقباض پذیر باشد.

برهان. قضیه 4.1 از [12]. □

۵.۳ نکته. دو قضیهٔ بالا نشان می دهد که دو مفهوم بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر و بطور یکنواخت تقریباً انقباض پذیر با هم معادل نیستند. چون اگر معادل شوند دو مفهوم میانگین پذیری و انقباض پذیری با هم معادل می شوند که در حالت کلی این مسئله درست نمی باشد.

کرتیس در قضیه 6.2 مقالهٔ [21] نشان داده است که یک جبر باناخ انقباض پذیر جابجایی، با بعد متناهی است یعنی به ازای n ای با C^n یکریخت است.

حال اگر یک جبر باناخ جابجایی و میانگین پذیر و نا متناهی بعد در نظر بگیریم این دو مفهوم یعنی انقباض پذیری ومیانگین پذیری در این حالت با هم، هم ارز نیستند.

به عنوان مثال $c_\circ(S)$ که S یک زیر مجموعه شمارش ناپذیراز R است، یک جبر باناخ میانگین پذیر نامتناهی بعد است، پس انقباض پذیر نیست.

۶.۳ نتیجه. هر جبر باناخ با بعد متناهی و تقریباً میانگین پذیر، میانگین پذیر است.

برهان. اگر یک جبر باناخ مثل A متناهی بعد و تقریباً میانگین پذیر باشد آنگاه این جبر باناخ بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر است. بنابراین نتیجه از قضیه قبل بدست می آید. □

فصل ۴

فضای دنباله‌ای

۱.۴ تعریف. فرض کنید C^N فضای همه توابع از N به C است. هر زیر جبر باناخ C^N را یک جبر باناخ دنباله ای می نامند مشروط بر اینکه $c_{00} \subseteq A$ که در آن c_{00} زیر جبری از C^N متشکل از دنباله هایی است دارای محمل فشرده (در واقع چون در فضای گسسته یک زیر مجموعه فشرده است اگر وتنها اگر متناهی باشد، c_{00} همان $C_C(N)$ می باشد) یعنی c_{00} شامل دنباله هایی است که فقط تعداد متناهی از اعضایش مخالف صفراست.

به عنوان مثال $c_0 = c_0(N)$ و$l^p = l^p(N)$ برای $1 \leqslant p \leqslant \infty$ جبرهای باناخ دنباله ای روی N هستند.

۲.۴ نکته. تمامی جبرهای باناخ تقریباً میانگین پذیر شناخته شده دارای همانی تقریبی کراندار می باشند، ولی آن چه که در حالت کلی در مورد جبرهای باناخ تقریباً میانگین پذیر می توان گفت این است که این جبرها دارای همانی تقریبی یکطرفه،

احتمالاً بی کران می باشند.

بنابراین این مطلب برای ما جالب است که شرایطی را بیابیم که تحت این شرایط یک جبر باناخ تقریباً میانگین پذیر دارای همانی تقریبی کراندار باشد.

۳.۴ لم. فرض کنیم A یک جبر باناخ تقریباً میانگین پذیر باشد، آنگاه A دارای همانی تقریبی راست و چپ می باشد.

برهان. لم 2.2 از [12]. □

۴.۴ نکته. طبق گزاره 11.6 از [1] هنگامی که جبر باناخ A دارای همانی تقریبی چپ وراست کراندار باشد، آنگاه این جبر دارای یک همانی تقریبی دو طرفه کراندار است. به این صورت که اگر $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ همانی تقریبی چپ کراندار و$(f_\mu)_{\mu\in M}$ همانی تقریبی راست کراند ار باشد آنگاه داریم $(f_\mu+e_\lambda-f_\mu e_\lambda)_{(\lambda,\mu)\in(\Lambda\times M)}$ یک همانی تقریبی دو طرفه کراندار برای A است.

البته در اینجا $\Lambda\times M$ یک مجموعه جهتدار با رابطه: $(\lambda,\mu)\lesssim(\lambda',\mu')$ اگر $\lambda\lesssim\lambda'$ و $\mu\lesssim\mu'$ می باشد ($\lambda,\lambda'\in\Lambda$ و $\mu,\mu'\in M$).

$$\begin{aligned}\|(f_\mu+e_\lambda-f_\mu e_\lambda)x-x\| &= \|e_\lambda x-x+f_\mu x-f_\mu e_\lambda x\|\\ &\leqslant \|e_\lambda x-x\|+\|f_\lambda\|\|x-e_\lambda x\|\end{aligned}$$

چون (f_μ) کراندار و (e_λ) یک همانی تقریبی است پس به وضوح معلوم است که $(f_\mu+e_\lambda-f_\mu e_\lambda)$ یک همانی تقریبی چپ کراندار است و بطور مشابه یک همانی تقریبی راست کراندار نیز می باشد.

اما این حکم در حالت بی کران بودن همانی های تقریبی برقرار نمی باشد. برای

مشاهده مثالی در این رابطه به مثال 2.2 از [7] مراجعه کنید.

۵.۴ قضیه. هر یک از شرایط زیر برای تقریباً میانگین پذیر بودن دنباله ای کافی است:

(۱). برای جبر باناخ A دنباله (G_n) در $A\hat{\otimes}A$ وجود داشته باشد بقسمی که $\pi(G_n)=e$ (π نگاشت ضرب است) و برای هر a متعلق به A داشته باشیم:

$$\|a.G_n - G_n.a\| \to \circ$$

(۲). A جبر باناخ دنبا له ای با یک همانی تقریبی کراندار در $c_{\circ\circ}$ باشد.

برهان . نتایج 2.2 و 3.5 از [5]. □

۶.۴ نماد گذاری. به ازای هر n عضو N قرار می دهیم $E_n = \chi_{[\text{۱},n]}$ و $e_n = \chi_{\{n\}}$ (e_n و E_n هر دو عضو $c_{\circ\circ}$ هستند).

۷.۴ قضیه. فرض کنیم A یک جبر باناخ دنباله ای است بقسمی که (E_{n_k}) یک همانی تقریبی کراندار است که در آن (n_k) صعودی است. آنگاه A بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر است (چون A بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر است، بطور دنباله ای تقریباً میانگین پذیر نیز می شود)اگر و تنها اگر A یک همانی تقریبی دنباله ای کراندار در $c_{\circ\circ}$ داشته باشد.

برهان . فرض کنیم A بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر است، و نیز فرض کنیم (E_{n_k}) بی کران است، چون در غیر اینصورت نتیجه بدست آمده است.

فرض می کنیم $P_k = E_{n_{k+\text{۱}}} - E_{n_k}$ یک دنباله بی کران از عناصر خودتوان است (درصورت نیاز باارجاع به یک زیر دنباله). در واقع

چون (E_{n_k}) یک همانی تقریبی است n_k را آنقدر بزرگ اختیار کرده که $E_{n_k}E_{n_{k+1}}$ با E_k، $E_{n_k}E_{n_k}$ با E_{n_k} و $E_{n_{k+1}}E_{n_{k+1}}$ با $E_{n_{k+1}}$ یکی شوند پس داریم:

$$(E_{n_{k+1}}-E_{n_k})^2 = E_{n_{k+1}}^2+E_{n_k}^2-2E_{n_{k+1}}E_{n_k}=\mathrm{E}_{n_{k+1}}+E_{n_k}-2E_{n_k} = E_{n_{k+1}}-E_{n_k}$$

پس P_k ها خودتوان هستند.

قرار می دهیم $P_0 = E_{n_1}$. نگاشت $T_k : A \to A$ را با ضابطه $T_kx = xE_{n_k}$ تعریف می کنیم. آنگاه چون (E_{n_k}) یک همانی تقریبی است دنبالهٔ (T_k) نقطه‌ای به همانی میل می کند، بنابراین با استفاده از قضیه کرانداری یکنواخت $B > 0$ ای وجود دارد بقسمی که $\|T_k\| \leqslant B$ برای تمام k ها. حال قرار می دهیم $Q_k = T_{k+1} - T_k$، داریم $\|Q_k\| \leqslant 2B$ برای هر k و نیز قرار می دهیم $Z_k = \frac{P_k}{\|P_k\|}$.

حال با استفاده از مفروضات قضیه و قضیهٔ ۳.۲ نتیجه می شود که دنبالهٔ (M_n) در $A\hat{\otimes}A$ و (F_n) در A وجود دارند بقسمی که (F_n) یک همانی تقریبی برای A است و برای هر x متعلق به A داریم:

$$x.M_n - M_n.x - x \otimes F_n + F_n \otimes x \to 0$$

اگر x متعلق به A باشد، چون E_{n_k} یک همانی تقریبی برای A است پس $x - E_{n_k}x \to 0$ پس چون $E_{n_k}x$ متعلق به c_{00} است بنابراین c_{00} در A چگال است ($E_{n_k} \in c_{00}$ و $x \in A$، پس $supp\ E_{n_k}x$ زیر $supp\ E_{n_k}$ قرار می گیرد پس $E_{n_k}x \in c_{00}$). پس میتوان فرض کرد که M_n متعلق به $c_{00} \otimes c_{00}$ و F_n متعلق به c_{00} است.

با استفاده از قضیهٔ کرانداری یکنواخت برای نگاشت

$x \to x.M_n - M_n.x - x \otimes F_n + F_n \otimes x$ از A بتوی $A\hat{\otimes}A$، ثابت مثبتی مثل L

موجود است بقسمی که:

$$\|x.M_n - M_n.x - x \otimes F_n + F_n \otimes x\| \leqslant L\|x\| \qquad (n \in N) \qquad (۳)$$

حال در (۳) قرار می دهیم $x = Z_k$، داریم:

$$\|Z_k.M_n - M_n.Z_k - Z_k \otimes F_n + F_n \otimes Z_k\| \leqslant L \qquad (n \in N) \qquad (۴)$$

حال فرض می کنیم $F_n = \sum_j f_j^{(n)} e_j$ و $M_n = \sum_i (\sum_j a_{ij}^{(n)} e_j) \otimes (\sum_l b_{il}^{(n)} e_l)$ که

$$\sum_i \|(\sum_j a_{ij}^{(n)} e_j)\| \|(\sum_l b_{il}^{(n)} e_l)\| \leqslant \|M_n\| + ۱$$

البته توجه کنید چون F_n و M_n به ترتیب به $c_{\circ\circ}$ و $c_{\circ\circ} \otimes c_{\circ\circ}$ تعلق دارند، هر یک از جمع های بالا متناهی است و نیز a_{ij} و $f_j^{(n)}$ برای هر i, j, n متعلق به C می باشند.

حال داریم:

$$\|P_k\|(Z_k.M_n - M_n.Z_k - Z_k \otimes F)$$

$$= P_k.M_n - M_n.P_k - P_k \otimes F_n$$

$$= \sum_i (\sum_{j=n_k+۱}^{n_{k+۱}} a_{ik}^{(n)} e_j) \otimes (\sum_j b_{ij}^{(n)} e_j) - \sum_i (\sum_j a_{ij}^{(n)} e_j) \otimes (\sum_{l=n_k+۱}^{n_{k+۱}} b_{il}^{(n)} e_l)$$

$$- \sum_{j=n_k+۱}^{n_{k+۱}} e_j \otimes (\sum_i \sum_{l=n_i+۱}^{n_{i+۱}} f_l^{(n)} e_l)$$

توجه کنید که چون P_k خود توان است پس $Z_k P_k = P_k$، داریم:

$$\|P_k\|(Z_k.M_n.P_k - M_n.Z_k.P_k - Z_k \otimes F_n.P_k)$$

$$= \sum_i (\sum_{j=n_k+۱}^{n_{k+۱}} a_{ik}^{(n)} e_j) \otimes (\sum_{l=n_k+۱}^{n_k+۱} b_{il}^{(n)} e_l) - \sum_i (\sum_j a_{ij}^{(n)} e_j) \otimes (\sum_{l=n_k+۱}^{n_{k+۱}} b_{il}^{(n)} e_l)$$

$$- \sum_{j=n_k+۱}^{n_{k+۱}} e_j \otimes \sum_{l=n_k+۱}^{n_{k+۱}} f_l^{(n)} e_l. \qquad (۵)$$

حال جمله سمت راست (۵) را در نظر بگیرید. برای هر k، $\|P_k\| \sum_{j=n_k+۱}^{n_{k+۱}} e_j$ دارای نرم واحد است و $\sum_{l=n_k+۱}^{n_{k+۱}} f_l^{(n)} e_l \to \circ$ وقتی که $k \to \infty$. همچنین ضرب از

راست بوسیلهٔ P_k ها یک نگاشت، با کران $۲B$ است (چون:

$$\|(a\otimes b).P_k\| = \|a\otimes bP_k\| = \|a\otimes T_k b\| \leqslant \|a\|\|T_k b\| \leqslant \|a\|\|b\|\|T_k\|$$

$$(\leqslant \|a\|\|b\|۲B$$

حال داریم: $\|\sum_i(\sum_{j=n_k+۱}^{n_{k+۱}} a_{ik}^{(n)} e_j) - (\sum_i a_{ij}^{n} e_j)\| \leqslant (۱+۲B)\|\sum_i(\sum_j a_{ij}^{(n)} e_j)\|$

بنابراین جملات دیگر در (۵) حداکثر دارای نرم:

$$\|\sum_i \sum_{n_k+۱}^{n_{k+۱}} a_{ik}^{(n)} e_j - \sum_i \sum_j a_{ij}^{(n)} e_j\|.\|(\sum_{l=n_k+۱}^{n_{k+۱}} b_{il}^{(n)} e_l)\|$$

$$\leqslant ۲B(۱+۲B)\sum_i \|\sum_j a_{ij}^{(n)} e_j\|\|\sum_l b_{il}^{(n)} e_l\|$$

$$\leqslant ۲B(۱+۲B)(\|M_n\|+۱).$$

چون $\|P_k\|\to\infty$ (P_k یک دنباله نامحدود است) نتیجه می گیریم که برای هر n،

$$Z_k.M_n.P_k - M_n.Z_k.P_k - Z_k\otimes F_n.P_k \to ۰ \qquad (k\to\infty)$$

اما از (۴) بدست می آید:

$$\|Z_k.M_n.P_k - M_n.Z_k.P_k - Z_k\otimes F_n.P_k + F_n\otimes Z_k.P_k\| \leqslant ۲BL$$

بنابراین:

$$\|F_n\otimes Z_k.P_k\| \leqslant ۲BL + \|Z_k.M_n.P_k - M_n.P_k - Z_k\otimes F_n.P_k|$$

حال چون برای هر k,n داریم:

$$\|F_n\| = \lim_k \|F_n\otimes Z_k\| = \lim_k \|F_n\otimes Z_k.P_k\|$$

پس (F_n) یک همانی تقریبی کراندار است، بنابراین (F_n) یک همانی تقریبی دنباله‌ای کراندار برای A است که زیر مجموعه $c_{۰۰}$ می باشد.

حال فرض کنیم A دارای یک همانی تقریبی دنباله ای در $c_{۰۰}$ می باشد، پس از

قضیهٔ ۵.۴ قسمت دوم بدست می آ ید که A بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر است.

□

۸.۴ تعریف (جبرهای فین‌اشتاین)[۱] . فرض کنیم $\alpha = (\alpha_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد. تعریف می کنیم:

$$A_\alpha := \{a = (a_n) \in c_0 : \|a\| = \|a\|_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |a_{n+1} - a_n| < \infty\}$$

بوضوح A_α با نرم داده شده یک فضای باناخ است. ثابت می کنیم با ضرب نقطه ای نرم بالا A_α را به یک جبر باناخ تبدیل می کند. فرض کنیم a, b متعلق به A_α باشند داریم،

$$\begin{aligned}\|ab\| &= \|ab\|_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n| \\ &= \|ab\|_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |a_{n+1}(b_{n+1} - b_n) + (a_{n+1} - a_n) b_n| \\ &\leqslant \|a\|_\infty \|b\|_\infty + \|a\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |b_{n+1} - b_n| + \|b\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |a_{n+1} - a_n| \\ &\leqslant \|a\|.\|b\|\end{aligned}$$

بنابراین A تحت ضرب نقطه ای یک جبر باناخ دنباله ای است.

۹.۴ لم. برای $\alpha = (\alpha_n)$، جبر A_α دارای یک همانی تقریبی مشمول در c_{00} می باشد. بعلا وه، این جبر دارای یک همانی تقریبی کراندار است (جزء c_{00}) اگر و تنها اگر $\liminf_n \alpha_n < \infty$ باشد.

برهان . لم 5.1 از [20]. □

۱۰.۴ قضیه. با مفروضات بالا، جبر A_α میانگین پذیر است اگر و تنها اگر

[۱] $feinsten\ algebras$

$\sum_n \alpha_n < \infty$.

برهان . [10]. □

۱۱.۴ نکته. طبق نماد گذاری ٦.۴ جبرهای A_α برای $\alpha = (\alpha_n)$ همیشه دارای یک همانی تقریبی به شکل (E_{n_k}) می باشند.

۱۲.۴ نتیجه. جبر فین‌اشتاین A_α، بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر است اگر $\liminf_n \alpha_n < \infty$، اگر وتنها اگر دارای یک همانی تقریبی کراندار باشد.

برهان . اگر A_α بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر باشد، قضیه ۷.۴ نشان می دهد که A_α دارای یک همانی تقریبی کراندار است و این نیز طبق لم ۹.۴ نتیجه می دهد که $\liminf_n \alpha_n < \infty$.

بعکس اگر $\liminf_n \alpha_n < \infty$ دوباره از لم ۹.۴ نتیجه می شود که A_α دارای یک همانی تقریبی کراندار است، حال قضیه ۷.۴ نشان می دهد که A_α بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر است. □

۱۳.۴ تذکر. قضیه 4.1 از [5] بیان می کند که برای هر p که $۱ \leqslant p < \infty$ و $l^p(N)$ تقریباً میانگین پذیر نیست و یک نتیجه فوری از این قضیه این است که $l^p(S)$ برای هر مجموعه نا متناهی S (S را شمارش پذیر در نظر می گیریم)، تقریباً میانگین پذیر نمی باشد چون یک بروریختی پیوسته از $l^p(N)$ به $l^p(S)$ موجود است (گزاره 2.2 از [12] در اینجا بکار می رود).

حال جبر A_α که $\alpha = (\alpha_k = ۱)$ (یعنی تمام جملا ت دنباله α، ۱ هستند) و دنباله (m_k) از اعداد طبیعی را با شرط $m_k > m_{k-۱} + ۱$ در نظر می گیریم. قرار می دهیم:

$$I = \{x \in A_\alpha : \mathrm{x}_j = \circ \quad \text{مگر} \quad j \in (m_k)\}$$

حال اگر I یک ایده‌ال بسته از A_α باشد که با $l^1(\{m_k\})$ ایزومورف است (شرط $m_k > m_{k-1} + 1$ روی عناصر $x \in I$ نتیجه می دهد که نگاشت $id : I \to l^1(\{m_k\})$ خوش تعریف بشود)، پس I تقریباً میانگین پذیر نمی باشد. اما چون $\alpha = (\alpha_k = 1)$ پس $\liminf_k \alpha_k = 1 < \infty$ پس طبق نتیجه ۱۲.۴ A_α بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر است یا اینکه A_α بطور دنباله ای تقریباً میانگین پذیر می باشد که می توان گفت A_α تقریباً میانگین پذیراست. پس از این بحث می توان نتیجه گرفت که ایده‌ال های بسته از یک جبر باناخ تقریباً میانگین پذیر، لزوماً خاصیت تقریباً میانگین پذیر بودن را به ارث نمی برند.

۱۴.۴ مثال. فرض کنیم S نیم گروه N با ضرب $mn = \min\{m, n\}$ باشد، قرار می دهیم $A_\wedge = l^1(S)$ با ضرب کانو لو شن به صورت

$$a.b = a * b \in l^1(S)\ ,\ (a * b)_n = \textstyle\sum_{i.j} a^i b^j = \sum_{\min\{i,j\}=n} a^i b^j \qquad (a, b \in l^1(S))$$

حال نشان می دهیم که $A_\wedge$ بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر است. توجه کنید که چون مجموعه $\{\delta_n : n \in N\}$ (δ_n عضوی است از l^1 که عضو n ام اش برابر با ۱ و بقیه عناصرش برابر با صفر باشند) با ضرب کانولوشن خودتوان و فضای تولید شده توسط این مجموعه در $l^1(S)$ چگال است پس طبق گزاره 2.8.72 از [2] که بیان می کند اگر A یک جبر باناخ جابجایی باشد که بوسیله عناصر خو د توانش تولید شده باشد آ نگاه A بطور ضعیف میانگین پذیر است. پس $A_\wedge$ یک جبر باناخ بطور ضعیف میانگین پذیر است، هر چند این جبر طبق قضیه 2 از [9] میانگین پذیر نیست.

حال به بحث اصلی خود یعنی اثبات اینکه $A_\wedge$ بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر است می پر دازیم.

برای $a = \sum_i a_i\delta_i \in \mathrm{A}_\wedge$ داریم چون:

$$\delta_n\delta_i = \delta_n * \delta_i = \begin{cases} \delta_n & i > n \\ \delta_i & i \leqslant n \end{cases}$$

پس

$$\delta_n a = \sum_{i=1}^n a_i\delta_i + (\sum_{i>n} a_i)\delta_n \to a$$

چون و قتی $n \to \infty$، $\sum_{i>n} a_i \to 0$ و $\sum_{i=1}^n a_i\delta_i \to a$. بنابراین (δ_n) یک همانی تقریبی کراندار دنباله ای می با شد. طبق [4] تبدیل گلفاند برای $A_\wedge$ نگاشت $\Phi : A_\wedge \to c_0$ با ضابطه زیر می باشد:

$$\Phi(x) = (\sum_{i\geq 1} x_i, \sum_{i\geq 2} x_i, ...)$$

که بوضوح یک به یک است و بردش شامل c_{00} می باشد. بنابراین $A_\wedge$ را می توانیم به عنوان یک جبر باناخ دنباله ای در نظر گرفت.

قضیهٔ ۵.۴ قسمت (۱) نشان می دهد که $A_\wedge$ بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر است با $G_n = E_n \otimes E_n$، که E_n دنباله مورد نیاز است که در $\Phi(A_\wedge)$ می باشدو چون $\Phi(\delta_n) = E_n$ پس

$F_n = \delta_n \otimes \delta_n$ متعلق به $A_\wedge\hat{\otimes}A_\wedge$ می باشد و نیز $\pi(F_n) = \delta_n$ (چون δ_n خود توان است) هر چند برای هما هنگی با گزاره 2.3 از [5] نیاز داریم که $\pi(F_n') = 2\delta_n$ در حقیقت قرار می دهیم $\delta_0 = 0$ و

$$F_n^{'} = F_n + \sum_{j=۱}^{n} (\delta_j - \delta_{j-۱}) \otimes (\delta_j - \delta_{j-۱})$$

داریم:

$$\pi(F_n^{'}) = \delta_n + \sum_{j=۱}^{n} (\delta_j - \delta_{j-۱})(\delta_j - \delta_{j-۱}) = \delta_n + \sum_{j=۱}^{n} (\delta_j - \delta_{j-۱}) = ۲\delta_n$$

پس دنباله $\{F_n^{'}\}$ شرط $\pi(F_n^{'}) = ۲\delta_n$ را دارد.

چون

$$\delta_k(\delta_j = \delta_{j-۱}) = \begin{cases} \delta_j - \delta_{j-۱} & j \leqslant k \\ ۰ & k \leqslant j - ۱ \end{cases}$$

برای $k \leqslant n$ داریم:

$$\delta_k.F_n^{'} - F_n^{'}.\delta_k + \delta_n \otimes \delta_k - \delta_k \otimes \delta_n$$

$$= \delta_k \sum_{j=۱}^{n} (\delta_j - \delta_{j-۱}) \otimes (\delta_j - \delta_{j-۱}) - \sum_{j=۱}^{n} (\delta_j - \delta_{j-۱}) \otimes (\delta_j - \delta_{j-۱})\delta_k$$

$$= ۰$$

و برای $k > n$ داریم:

$$\delta_k.F_n^{'} - F_n^{'}.\delta_k + \delta_n \otimes \delta_k - \delta_k \otimes \delta_n = \delta_k.F_n - F_n.\delta_k + \delta_n \otimes \delta_k - \delta_k \otimes \delta_n$$

بنابراین برای هر a متعلق به $A_\wedge$ داریم:

$$a.F_n^{'} - F_n^{'}.a + \delta_n \otimes a - a \otimes \delta_n$$

$$= (\textstyle\sum_{i>n} a_i\delta_i).F_n - F_n.(\sum_{i>n} a_i\delta_i) + \delta_n \otimes (\sum_{i>n} a_i\delta_i) - (\sum_{i>n} a_i\delta_i) \otimes \delta_n$$

چون $F_n = \delta_n \otimes \delta_n$ پس برای هر $i > n$ ، $\delta_i(\delta_n \otimes \delta_n)$ برابر با $(\delta_n \otimes \delta_n)$ و همین طور $(\delta_n \otimes \delta_n)\delta_i$. پس دو جمله اول از مجموع بالا با هم خنثی می شوند. و دو جمله اخر هم چون a متعلق به $A_\wedge = l^۱(S)$ است وقتی که $n \to \infty$ قسمت $\sum_{i>n} a_i\delta_i$ آن به

صفر میل می کند، پس:

$$a.F'_n - F'_n.a + \delta_n \otimes a - a \otimes \delta_n \to 0$$

پس بنا بر گزاره 2.3 از [5] ، $A_\wedge$ بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر است که نتیجه می دهد $A_\wedge$ بطور دنباله ای تقریباً میانگین پذیر است.

حال برای $A_\vee = l^1(S)$ با ضرب $mn = \max\{m,n\}$، δ_1 همانی است.

دنباله (G_n) را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$G_n = \delta_1 \otimes \delta_1 + \sum_{i=2}^{n}(2\delta_i \otimes \delta_i - \delta_i \otimes \delta_{i-1} - \delta_{i-1} \otimes \delta_i) \qquad (n \in N)$$

داریم:

$$\pi(G_n) = \delta_1 + \sum_{i=2}^{n} \pi(2\delta_i \otimes \delta_i) - \pi(\delta_i \otimes \delta_{i-1}) - \pi(\delta_{i-1} \otimes \delta_i)$$

$$= \delta_1 + \sum_{i=2}^{n}(2\delta_i^2 - \delta_i\delta_{i-1} - \delta_{i-1}\delta_i)$$

حال چون با توجه به ضرب نیم گروه N (ضرب $\max$) $\delta_i\delta_j = \delta_j$ اگر $i \leqslant j$ و نیز چون δ_i ها خود توان هستند، پس $\pi(G_n) = \delta_1$.

بعلا وه برای $l \geq n$ داریم:

$$\delta_l.G_n - G_n.\delta_l = \delta_l \otimes \delta_1 - \delta_1 \otimes \delta_l + 2\sum_{i=2}^{n}(\delta_l \otimes \delta_i - \delta_i \otimes \delta_l)$$

$$- \sum_{i=2}^{n}(\delta_l \otimes \delta_{i-1} + \delta_l \otimes \delta_i) + \sum_{i=2}^{n}(\delta_i \otimes \delta_l + \delta_{i-1} \otimes \delta_l)$$

$$= \delta_n \otimes \delta_l - \delta_l \otimes \delta_n.$$

و نیز برای $l < n$ داریم:

$$\delta_l.G_n - G_n.\delta_l$$

$$= \delta_l \otimes \delta_1 - \delta_1 \otimes \delta_l + 2\sum_{i=2}^{l}(\delta_l \otimes \delta_i - \delta_i \otimes \delta_l) + 2\sum_{i=l+1}^{n}(\delta_i \otimes \delta_i - \delta_i \otimes \delta_i)$$

$$- \sum_{i=2}^{l} \delta_l \otimes \delta_{i-1} - \sum_{i=l+1}^{n} \delta_i \otimes \delta_{i-1} - \sum_{i=l+2}^{n} \delta_{i-1} \otimes \delta_i - \sum_{i=2}^{l+1} \delta_l \otimes \delta_i$$

$$+ \sum_{i=2}^{l+1} \delta_i \otimes \delta_l + \sum_{l+2}^{n} \delta_i \otimes \delta_{i-1} + \sum_{i=l+1}^{n} \delta_{i-1} \otimes \delta_i + \sum_{i=2}^{l} \delta_{i-1} \otimes \delta_l.$$

در مجموع بالا جملاتی را که عامل اول آنها δ_l است را دسته بندی می کنیم، در این صورت داریم:

$$\delta_l \otimes (\delta_1 + 2(\sum_{i=2}^{l} \delta_i - \delta_l) - \sum_{i=2}^{l} \delta_{i-1} - \sum_{i=2}^{l+1} \delta_i + \delta_{l+1} + \delta_l)$$

و چون عا مل سمت راست عبارت بالا صفر می شود پس عبارت بالا در کل صفر است.

پس از دسته بندی جملاتی که عامل اول آنها δ_l است جملات باقی مانده به صورت زیر می باشند:

$$-\delta_1 \otimes \delta_l - 2 \sum_{i=2}^{l-1} \delta_i \otimes \delta_l - \sum_{i+1}^{n} \delta_i \otimes \delta_{i-1} - \sum_{i=l+2}^{n} \delta_{i-1} \otimes \delta_i +$$

$$+ \sum_{i=2}^{l-1} \delta_i \otimes \delta_l + \delta_{l+1} \otimes \delta_l + \sum_{i=l+2}^{n} \delta_i \otimes \delta_{i-1} + \sum_{i=l+2}^{n} \delta_{i-1} \otimes \delta_i + \sum_{i=2}^{l} \delta_{i-1} \otimes \delta_l.$$

که مجموع این جملات همگی صفر می شوند. بنا براین برای $n < l$ داریم:

$$\delta_l.G_n - G_n.\delta_l = 0$$

بنابراین برای هر $a = \sum_i a_i \delta_i$ متعلق به $A_\vee$ داریم:

$$a.G_n - G_n.a = \sum_{k \geq n} a_k(\delta_n \otimes \delta_k - \delta_k \otimes \delta_n) \to 0$$

بنابراین $A_\vee$ طبق قضیه ۵.۴ قسمت (۱)، بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر است.

فصل ۵

میانگین پذیری تقریبی بطور کراندار

۱.۵ تعریف. جبر باناخ A را بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر می گو ئیم اگر برای هر $A-$ مدول دو طرفه باناخ مثل X و هر مشتق پیو سته $D: A \to X^*$، تور (ξ_i) در X^* موجود باشد بقسمی که تور (ad_{ξ_i}) در $B(A, X^*)$ نرم کراندار باشد و

$$D(a) = \lim_i ad_{\xi_i}(a) \qquad (a \in A)$$

جبر باناخ A را بطور کراندار تقریباً انقباض پذیر می گوئیم اگر برای هر $A-$ مدول دو طرفه باناخ مثل X و هر مشتق پیو سته $D: A \to X$، تور (x_i) در X (ad_{x_i}) در $B(A, X)$ نرم کراندار باشد و

$$D(a) = \lim_i ad_{x_i}(a) \qquad (a \in A)$$

توجه کنید که در تعاریف بالا مشتق های (ad_{ξ_i}) و(ad_{ξ_i}) باید کراندار باشند ونیازی به کراندار بودن (ξ_i) و (x_i) نداریم. ولی تحت شرایط قضیه زیر کراندار بودن (ξ_i) و (x_i) در تعاریف بالا نیز بدست می آ ید.

۲.۵ قضیه. فرض کنیم A یک جبر باناخ است، اگر A میانگین پذیر باشد، آنگاه A بطور کراندار تقریباً انقباض پذیر است و همچنین تور (x_i) در تعریف بالا در X کراندار است.

برهان . قضیه 1 از [16]. □

۳.۵ تعریف. فرض کنیم (A_λ) خانواده‌ای از جبر های باناخ است جمع مستقیم l^∞ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$l^\infty(A_\lambda) = \{(x_\lambda)\ x_\lambda \in A_\lambda\ ,\ \|(x_\lambda)\| = \sup_\lambda \|x_\lambda\| < \infty\}$$

و همچنین $c_\circ(A_\lambda)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$c_\circ(A_\lambda) = \{(x_\lambda) \in l^\infty(A_\lambda)\ ,\ \|x_\lambda\| \to \circ\}$$

۴.۵ نکته. طبق بر هان مثال 6.1 از [12] به ازای هر تور (A_i) از جبر های باناخ میانگین پذیر $c_\circ(A_i^\sharp)$ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است.

بعد از تعریف مفهوم بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر این مسئله مطرح می شود که آیا می توان به هر جبر باناخ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر ثابتی برای کراندار بودن توری از مشتقهای درونی که $D : A \to X^*$ را تقریب می زند، وابسته کرد. قضیه زیر پاسخ مثبت به این سئوال ما می دهد.

۵.۵ قضیه. جبر باناخ A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است اگر وتنها اگر ثابتی مثبت مثل L_b موجود با شد بقسمی که برای هر برای هر $A -$ مدول دو طرفه باناخ مثل X و هر مشتق پیو سته $D : A \to X^*$، تور (ξ_i) در X^* موجود باشد بقسمی که:

(۱). $\sup \|ad_{\xi_i}\| \leqslant L_b\|D\|$.

(۲). $(a \in A) \qquad D(a) = \lim_i ad_{\xi_i}(a)$.

برهان . فرض کنیم A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است ولی ثابت L_b با خاصیت (۱) موجود نباشد، پس برای هر n متعلق به N یک $A-$ مدول دو طرفه باناخ مثل M_n موجود است بقسمی که $D_n : A \to M_n^*$ و برای هر تور (ξ_i) از M_n^* داریم $\sup_i \|ad_{\xi_i}\| > n\|D_n\|$.

حال $A-$ مدول دو طرفه باناخ $X = l^1(M_n^*)$ را در نظر می گیریم که دوگانش X^* برابر با $X = l^\infty(M_n^*)$ می باشد و مشتق $D = (D_n)$ را از A به $X = l^\infty(M_n^*)$ در نظر می گیریم یعنی $D = (D_n) : A \to l^\infty(M_n^*)$.

اگر تور (ξ_i) از $l^\infty(M_n^*)$ را در نظر بگیریم با توجه به تعریف $l^\infty(M_n^*)$ در ۳.۵ هر ξ_i به شکل $\xi_i = (\xi_i^1, \xi_i^2, \xi_i^3, ...)$ است که در آن $\xi_i^n \in M_n^*$. پس برای هر n متعلق به N

$\sup_i \|ad_{\xi_i^n}\| \leqslant \sup_i \|ad_{\xi_i}\|$، پس:

$$n\|D_n\| < \sup_i \|ad_{\xi_i^n}\| \leqslant \sup_i \|ad_{\xi_i}\| \qquad (1)$$

حال چون A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است فرض کنیم (ξ_i) توری از $l^\infty(M_n^*)$ باشد که $D(a) = \lim_i ad_{\xi_i}(a)$ و (ad_{ξ_i}) در نرم کراندار است ولی (۱) متناقض با این است.

پس L_b ایی بادو خاصیت (۱) و(۲) موجود است.

قسمت عکس هم با توجه به تعریف ۱.۵ به وضوح بر قرار است. □

حال مشابه قضیهٔ ۲.۱ که در واقع محکی است برای تقریباً میانگین پذیر بودن جبر

باناخ A است، قضیه ای در اینجا بیان می کنیم که این قضیه نیز محکی است برای بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر بودن جبر باناخ A.

۶.۵ لم. جبر باناخ A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است اگر و تنها اگر $A^\sharp$ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر باشد.

برهان. فرض کنیم A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر و X یک $A^\sharp-$ مدول دو طرفه باناخ و $D : A^\sharp \to X^*$ یک مشتق باشد.

گزارهٔ 2.5 از [12] بیان می کند که اگر A دارای همانی تقریبی کراندار باشد، آنگاه A تقریباً میانگین پذیر است اگر و تنها اگر هر مشتق از A بتوی دوگان هر $A-$ مدول دو طرفه شبه یکانی [1] تقریباً درونی باشد(A مدول دو طرفه X شبه یکانی است اگر $X = A.X.A$ که $A.X.A = \{a.x.b :\ a, b \in A\ ,\ x \in X\}$).

حال چون $A^\sharp$ یکانی است پس طبق گزارهٔ بالا کافی است X را شبه یکانی در نظر بگیریم، پس $X = A^\sharp.X.A^\sharp$.

حال اگر $x \in X$ پس $a, b \in A^\sharp$ و $z \in X$ موجودند بقسمی که $x = a.z.b$، بنابراین داریم:

$$e.x = e.(a.z.b) = ea.z.b = a.z.b = x$$

$$x.e = (a.z.b).e = a.z.be = a.z.b = x$$

پس برای هر x متعلق به X داریم، $e.x = x.e = x$. پس برای هر y متعلق به X^* نیز داریم $e.y = y.e$،

چون $(e.y)(x) = y(x.e) = y(x)$ و $(y.e)(x) = y(e.x) = y(x)$.

[1] $neo-unital$

حال داریم:

$$D(e) = D(e.e) = D(e).e + e.D(e) = ۲e.D(e) = ۲D(e)$$

پس نتیجه می گیریم که $D(e) = ۰$.

حال طبق فرض تور (x_i^*) در X^* و $M > ۰$ موجود است بقسمی که برای هر a متعلق به A

$$D(a) = \lim_i(a.x_i^* - x_i^*.a) \qquad , \qquad \|a.x_i^* - x_i^*.a\| \leqslant M\|a\| \ , \ (\forall i)$$

چون $D(e) = ۰$ و برای هر x^* متعلق به X^* داریم $e.x^* = x^*.e$. پس

$$D(a) = D(a) + \alpha D(e) = D(a + \alpha e) = \lim_i((a + \alpha e).x^* - x^*.(a + \alpha e))$$

و $\|(a + \alpha e).x^* - x^*.(a + \alpha e)\| \leqslant M\|a\| \leqslant M\|a + \alpha e\|$

بنابراین $A^\sharp$ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است.

بعکس فرض کنید X یک $A-$ مدول دو طرفهٔ باناخ و $D : A \to X^*$ یک مشتق باشد. قرار می دهیم $e.x = x.e = x$. بنابراین X به یک $A^\sharp$ مدول دو طرفه باناخ تبدیل می شود. قرار می دهیم $D(e) = ۰$، D را به $A^\sharp$ توسیع می دهیم.

فرض می کنیم $A^\sharp$ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است. تور (x_i^*) از X^* و $M > ۰$ را چنان در نظر می گیریم که برای هر a متعلق به A:

$$D(a) = \lim_i(a.x_i^* - x_i^*.a) \qquad , \qquad \|a.x_i^* - x_i^*.a\| \leqslant M\|a\| \ , \ (\forall i)$$

پس A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است. □

۷.۵ قضیه. فرض کنیم جبر باناخ A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است، آنگاه تور (M_v) در $(A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp)^{**}$ و ثابت $L > ۰$ موجود است بقسمی که برای هر a متعلق

به $A^\sharp$ داریم:

$$\|a.M_v - M_v.a\| \leqslant L\|a\| \ , \ \pi^{**}(M_v) \to \circ \ , \ a.M_v - M_v.a \to \circ$$

بعکس، اگر A دارای ویژگی بالا و نیز $(\pi^{**}(M_v))$ کراندار باشد آنگاه A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است.

برهان. بنا بر لم ٦.٥ اگر A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر باشد، آنگاه $A^\sharp$ نیز چنین است. حال فرض کنیم $u = e \otimes e$، چون $\pi^{**}(ad_u(a))$، حد ضعیف ستارهٔ $\pi(a.u - u.a) = \circ$ است پس $\pi^{**}(ad_u(a)) = \circ$.

بنابراین $ad_u : A^\sharp \to \ker \pi^{**}$ یک مشتق پیوسته است.

حال اگر $X = \frac{(A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp)^*}{\pi^*((A^\sharp)^*)}$ که در آن $\pi^* : (A^\sharp)^* \to (A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp)^*$ الحاقی نگاشت ضرب $\pi : A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp \to A^*$ است، آنگاه $X^* \cong \ker \pi^{**}$، زیرا، بنا به قضیه ای در آنالیز تابعی که بیان می کند اگر X یک فضای باناخ و M یک زیر فضای بسته از X باشد آنگاه $(\frac{X}{M})^*$ بطور طولپا با $M^\perp$ یکریخت است. اما $M^\perp = \ker \pi^{**}$ پس $X^* \cong \ker \pi^{**}$.

چون $A^\sharp$ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است پس تور (e_v) از $\ker \pi^{**}$ موجود است بقسمی که (ad_{e_v}) با نرم کراندار است و $ad_u(a) = \lim_v ad_{e_v}(a)$. قرار می دهیم $M_v = u - e_v$ و فرض کنیم $a \in A^\sharp$، داریم:

$$a.M_v - M_v.a = a.(u - e_v) - (u - e_v).a = a.u - u.a - (a.e_v - e_v.a)$$

چون $ad_u(a) = \lim_v ad_{e_v}(a)$ پس $a.M_v - M_v.a \to \circ$ و نیز داریم:

$$\pi^{**}(M_v) = \pi^{**}(u - e_v) = \pi^{**}(u) = e$$

و نیز همچنین داریم:

$$\|a.M_v - M_v.a\| \leqslant \|a.u - u.a\| + \|a.e_v - e_v\|$$

$$\leqslant ۲\|a\|\|u\|C_X + \|ad_{e_v}(a)\|$$

$$\leqslant ۲\|u\|\|a\|C_X + P\|a\| = (۲\|u\|C_X + P).\|a\|$$

که $P > ۰$ بقسمی که $\|ad_{e_v}\| \leqslant P$ و C_X ثابتی است که در تعریف A — مدول X آمده است. حال اگر قرار دهیم $L = (۲\|u\|C_X + P)$ اثبات قسمت کفایت قضیه به پایان می رسد.

حال فرض کنیم M_v در $(A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp)^{**}$ با خواص مذکور درقضیه موجوداست و بعلاوه $(\pi^{**}(M_v))$ کراندار است. می خواهیم ثابت کنیم که A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است. بنا بر لم ٦.۵ ثابت می کنیم که $A^\sharp$ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است.

فرض می کنیم که $D : A^\sharp \to X^*$ یک مشتق پیوسته و X یک A — مدول دو طرفه باناخ است.

بنا بر گزارهٔ 2.5 از [12] که در ضمن اثبات لم ٦.۵ بیان شد کافی است X را شبه یکانی در نظر بگیریم یعنی $X = A^\sharp.X.A^\sharp$. حال برای هر v $f_v : X \to C$ را با ضابطهٔ $f_v(x) = M_v(\mu_x)$تعریف می کنیم که در آن μ_x $(x \in X)$ از $A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp$ به C با ضابطهٔ $\mu_x(a \otimes b) = (aDb)(x)$ تعریف می شود.

برای هر d, b از A داریم:

$$\mu_{x.a-a.x}(b \otimes d) = (bDd)(x.a - a.x)$$

$$= (bDd)(x.a) - (bDd)(a.x)$$

حال از طرفی داریم:

$$(\mu_x.a)(b\otimes d)=\mu_x(ab\otimes d)=(abDd)(x)$$

$$(a.\mu_x)(b\otimes d)=\mu_x(b\otimes da)=(b.Dda)(x)$$

پس داریم:

$$\mu_{x.a-a.x}(b\otimes d)=(\mu_x.a-a.\mu_x)(b\otimes d)$$

پس به ازای هر m از $A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp$ داریم:

$$\mu_{x.a-a.x}(m)=(\mu_x.a-a.\mu_x)(m)$$

حال بنا بر قضیهٔ گلدشتاین برای هر M_v تور (m_v^α) در $A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp$ موجود است بقسمی که $m_v^\alpha\to M_v$.

حال داریم:

$$\begin{aligned}(a.f_v-f_v.a)(x)&=f_v(x.a-a.x)\\&=M_v(\mu_{a.x-x.a})=\lim_\alpha(\mu_{a.x-x.a})(m_v^*)\\&=\lim_\alpha(\mu_x.a-a.\mu_x)(m_v^*)\\&=M_v(\mu_x.a-a.\mu_x)=(a.M_v-M_v.a)(\mu_x)\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\|(a.f_v-f_v.a)(x)-(Da)(x)\|\leqslant\|a.M_v-M_v.a\|\|\mu_x\|$$

حال اگر $m=e\otimes e$ را در نظر بگیریم داریم:

$$\|\mu_x\|\leqslant\mu_x(m)\|=\|D(x)\|\leqslant\|D\|\|x\|$$

پس داریم:

$$\|(a.f_v-f_v.a)(x)-(Da)(x)\|\leqslant\|a.M_v-M_v.a\|\|D\|\|x\|$$

که چون $a.M_v - M_v.a \to 0$ پس D تقریباً درونی است. پس $A^\sharp$ تقریباً میانگین پذیر است.

اما چون $\|a.M_v - M_v.a\| \leqslant L\|a\|$ پس:

$$\begin{aligned}\|(a.f_v - f_v.a)(x)\| &\leqslant \|a.M_v - M_v.a\|\|D\|\|x\| + \|Da\|\|x\| \\ &\leqslant \|D\|\|x\|\|a\|L + \|D\|\|x\|\|a\|.\end{aligned}$$

پس

$$\|a.f_v - f_v.a\| \leqslant (\|D\|L + \|D\|)\|a\|$$

یعنی $A^\sharp$ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است. بنا براین طبق لم ۶.۵، A این گونه است یعنی بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است. □

طبق اصل کرانداری یکنواخت هر جبر باناخ بطور دنباله ای تقریباً میانگین پذیر، بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر می باشد. حال شرایطی به جبر باناخ A اضافه می کنیم که عکس گزارهٔ پیشین هم درست باشد.

۸.۵ قضیه. فرض کنیم A یک جبر باناخ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است. اگر A تفکیک پذیر باشد (یعنی یک زیر مجموعهٔ چگال شمارش پذیر داشته باشد) آنگاه A بطور دنباله ای تقریباً میانگین پذیر است.

برهان. فرض کنیم $\{b_n : n \in N\}$ یک زیر مجموعهٔ چگال و شمارا از A باشد. فرض کنیم X یک $A-$ مدول دو طرفهٔ باناخ باشد و $D : A \to X^*$ یک مشتق پیوسته باشد.

چون A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است ثابتی مثل $C > 0$ چنان موجود است

بقسمی که برای هر n متعلق به N، ξ_n متعلق به X^* (دوگان X)موجود است که:

$$\|D(b_k) - (b_k.\xi_n - \xi_n.b_k\| < \frac{1}{n} \qquad (k = 1, 2, ..., n)$$

و برای هر a متعلق به A: $\|a.\xi_n - \xi_n.a\| \leqslant C\|a\|$

حال دو شرط بالا ایجاب می کند که اولاً دنبالهٔ (ξ_n) در X^*، $D(b_k)$ را تقریب بزند، یعنی

$$D(b_k) = \lim_n (b_k.\xi_n - \xi_n.b_k) \qquad (k \in N)$$

و ثانیاً دنبالهٔ (ad_{ξ_n}) یک دنبالهٔ کراندار در $B(A, X^*)$ باشد. حال این دو شرط به همراه چگال بودن $\{b_n : n \in N\}$ نتیجه می‌دهند که:

$$D(a) = \lim_n (a.\xi_n - \xi_n.a) \qquad (a \in A)$$

بنابراین D بطور دنباله ای تقریباً درونی است، پس بطور دنباله ای تقریباً میانگین پذیر است. □

۹.۵ قضیه. فرض کنیم A یک جبر باناخ بطور کراندار تقریباً انقباض پذیر است. اگر A به عنوان یک فضای باناخ تفکیک پذیر باشد آنگاه A بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر می باشد.

برهان. این قضیه نیز مثل قضیه قبل ثابت می شود. □

۱۰.۵ مثال. فرض می کنیم $A = c_\circ(S)$ که S یک زیر مجموعهٔ ناشمارا از R است. آنگاه A میانگین پذیر است (چون طبق [22] هر C^* — جبر تعویض پذیر میانگین پذیر است) پس طبق قضیه کرانداری یکنواخت A بطور کراندار تقریباً انقباض پذیر است.

چون S ناشماراست پس A تفکیک پذیر نیست. A نمی تواند بطور دنباله ای تقریباً انقباض پذیر باشد چون اگر A این طور باشد آنگاه بنا بر لم 2.2 از [12]، A دارای یک همانی چپ دنباله ای است که امکان ندارد. بنابر این بدون تفکیک پذیری قضیه ۹.۵ برقرار نیست.

فرض کنیم A یک جبر باناخ و $A^\sharp$ یکه دار شدهٔ A است. نگاشت ضرب، $\pi : (A^\sharp)\hat{\otimes}(A^\sharp)^{op} \to A^\sharp$ را در نظر بگیرید و قرار دهید $K = \ker \pi$. یکی از توصیفهای استاندارد میانگین پذیری بنا بر قضیهٔ 2.20 از [17]، وجود یک همانی تقریبی کراندار در K می باشد. حال نشان می دهیم که میانگین پذیری تقریبی بطور کراندار را هم به روش مشابهی می توان توصیف کرد.

۱۱.۵ قضیه. جبر باناخ A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است اگر وتنها اگر تور $(u_i)_{i\in I}$ در K^{**} و $M > 0$ موجود باشند بقسمی که:

(۱). $(k \in K) \qquad k.u_i \to k$.

(۲). $(k \in K, i \in I) \qquad \|k.u_i\| \leqslant M\|k\|$.

برهان. فرض کنیم که A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است و فرض کنیم $D : A \to K^{**}$ یک مشتق با ضابطهٔ $D(a) = a \otimes e - e \otimes a$ است، آنگاه تور $(u_i)_{i\in I}$ در K^{**} و $M > 0$ موجود است بقسمی که برای هر a از A داریم:

$$D(a) = \lim_i(a.u_i - u_i.a)\ ,\ \|a.u_i - u_i.a\| \leqslant M\|a\|\ ,\ (i \in I)$$

حال نشان می دهیم که $(u_i)_{i\in I}$ دو شرط ذکر شده در قضیه را دارا می باشد.

فرض کنیم $k = \sum_n a_n \otimes b_n$ عضو K باشد که K نیز زیر مجموعه ای از

$(A^\sharp)\hat{\otimes}(A^\sharp)^{op}$ است. بنابراین $\pi(k) = ۰$ یعنی $\sum_n a_n b_n = ۰$. حال داریم:

$$k.u_i = \sum_n a_n.u_i.b_n = \sum_n a_n.u_i.b_n - \sum_n u_i.a_n.b_n$$

$$= \sum_n (a_n.u_i - u_i.a_n).b_n$$

بنابراین:

$$\|k.u_i\| \leqslant \sum_n \|a_n.u_i - u_i.a_n\| \|b_n\| \leqslant M \sum_n \|a_n\| \|b_n\|$$

بنا بر تعریف نرم k که در $(A^\sharp)\hat{\otimes}(A^\sharp)^{op}$ محاسبه می شود داریم:

$$\|k.u_i\| \leqslant M\|k\|$$

پس شرط (۲) در قضیه برقرار می شود. حال فرض کنیم $\epsilon > ۰$ و k را بصورت $k = k_۱ + k_۲$ می نویسیم که $k_۱ = \sum_{n=۱}^N c_n \otimes d_n \in K$ و $\|k_۲\| < \epsilon$ که این تجزیه بنا بر گزاره 2.13 از [16] انجام می شود.

حال به روش مشابه بالا داریم:

$$k_۱.u_i = \sum_{n=۱}^N c_n.u_i.d_n = \sum_{n=۱}^N (c_n.u_i - u_i.c_n).d_n \qquad (۹)$$

حال چون $D(a) = a \otimes e - e \otimes a$ برای هر a متعلق به A داریم:

$$k_۱ = \sum_{n=۱}^N c_n \otimes d_n = \sum_{n=۱}^N (c_n \otimes e - e \otimes c_n).d_n = \sum_{n=۱}^N D(c_n).d_n \qquad (۱۰)$$

حال دو رابطهٔ (۹) و (۱۰) را با هم ترکیب می کنیم، بدست می آوریم:

$$\|k_۱.u_i - k_۱\| \leqslant \sum_{n=۱}^N \|c_n.u_i - u_i.c_n - D(c_n)\| \|d_n\|$$

که برای i های بقدر کافی بزرگ عبارت بالا از هر ϵ کوچکتر می شود، چون $D = \lim_i ad_{u_i}$.

و چون $\|k_۲.u_i - k_۲\| \leqslant (M+۱)\|k_۲\| < (M+۱)\epsilon$

پس داریم:

$$\|k.u_i - k\| \leqslant (M + 1).\epsilon$$

برای وقتی که i بقدر کافی بزرگ می باشد. بنابراین شرط (۱) نیز در قضیه برقرار است.

بعکس فرض کنید تور $(u_i)_{i\in I}$ در K^{**} موجود است بقسمی که در دو شرط (۱) و (۲) در قضیه صدق می کند. طبق لم ۶.۵ کافی است که نشان دهیم $A^\sharp$ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است.

قرار می دهیم $v_i = e \otimes e - u_i \in ((A^\sharp)\hat{\otimes}(A^\sharp)^{op})^{**}$. چون $u_i \in K^{**}$ و K در K^{**} با توپولوژی ω^* چگال است پس یا $u_i \in K$ که در این صورت $\pi(u_i) = 0$ که نتیجه می دهد $\pi^{**}(u_i) = 0$ و یا اینکه تور (u^i_α) در K موجود است که $u^i_\alpha \to u_i$ پس $\pi^{**}(u_i) = \omega^* - \lim_\alpha \pi^{**}(u^i_\alpha)$.

پس چون برای هر α، $\pi^{**}(u^i_\alpha) = 0$ پس $\pi^{**}(u_i) = 0$، پس $\pi^{**}(v_i) = e$.

برای هر a متعلق به A داریم:

$$\begin{aligned} a.v_i - v_i.a &= (a \otimes e - e \otimes a) - (a.u_i - u_i.a) \\ &= (a \otimes e - e \otimes a) - (a \otimes e - e \otimes a).u_i \end{aligned}$$

چون $\pi(a \otimes e - e \otimes a) = 0$ پس $a \otimes e - e \otimes a \in K$، بنابراین طبق شرط اول

$$a.v_i - v_i.a \to 0$$

بعلاوه چون، $\|a \otimes e - e \otimes a\| \leqslant \|a \otimes e\| + \|e \otimes a\| = 2\|a\|$

پس:

$$\|a.v_i - v_i.a\| \leqslant ۲\|a\| + M۲\|a\| = \|a\|(۲ + ۲M)$$

حال قرار می دهیم $m = ۲ + ۲M$ پس:

$$\|a.v_i - v_i.a\| \leqslant m\|a\| \qquad (a \in A, i \in I)$$

فرض می کنیم X یک $A^\sharp$ — مدول دو طرفهٔ باناخ یکه—الحاقی شده[۲] است (یعنی برای هر x متعلق به X داریم $e.x = x.e = x$)ونیز فرض می کنیم $D : A^\sharp \to X^*$ یک مشتق باشد.

فرض کنیم $\phi : A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp \to X^*$ نگاشتی با ضابطهٔ $\phi(a \otimes b) = a.D(b)$ باشد.

طبق تعریف نرم روی $A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp$، $\|\phi\| \leqslant \|D\|$ و برای هر a متعلق به $A^\sharp$ و u متعلق به $A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp$ داریم:

$$\phi(u.a) = \phi(u).a + \pi(u).D(a) \qquad , \qquad \phi(a.u) = a.\phi(u)$$

زیرا اگر $u = b \otimes c$، آنگاه

$$\begin{aligned}\phi((b \otimes c).a) = \phi(b \otimes ca) = b.D(ca) &= b.D(c).a + b.c.D(a)\\ &= \phi(u).a + \pi(u).D(a)\end{aligned}$$

$$\phi(a.(b \otimes c)) = \phi(ab \otimes c) = ab.D(c) = \pi(u).D(c)$$

و حال با توجه به پیوسته بودن π برای هر u متعلق به $A^\sharp \hat{\otimes} A^\sharp$ دو رابطهٔ فوق برقرار است.

تصویر طبیعی $P : X^{***} \to X^*$ یک مورفیسم، $A^\sharp$— دو طرفه است، یعنی برای هر a عضو $A^\sharp$ و z متعلق به X^{***} داریم:

$$.P(a.x) = a.P(x) \ , \ P(x.a) = P(x).a$$

[۲] $unit - linked$

و نیز $\phi^{**} : (A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp)^{**} \to X^{***}$ ضعیف ستاره—ضعیف ستاره‌پیوسته است و نگاشت $\Psi = P.\phi^{**}$(ضرب در اینجا همان ترکیب توابع است) در شرط $\|\Psi\| \leqslant \|D\|$ صدق می کند (چون نرم P از یک کوچکتر است و نیز چون ϕ^{**} الحاقی ϕ^* است پس $\|\phi^*\| = \|\phi^{**}\|$ ونیز چون ϕ^* الحاقی ϕ است پس $\|\phi^*\| = \|\phi\|$ بنابراین $\|\phi\| = \|\phi^{**}\|$ ونیز داریم، $\|\phi\| \leqslant \|D\|$ پس $\|\Psi\| \leqslant \|D\|$).

حال برای هر a از $A^\sharp$ و u از $(A^\sharp\hat{\otimes}A^\sharp)^{**}$ با توجه به ω^* — پیوسته بودن P داریم:

$$\Psi(u.a) = \Psi(u).a + \pi^{**}(u).D(a) \qquad , \qquad \Psi(a.u) = a.\Psi(u)$$

حال چون X را یکه‌الحاقی شده در نظر گرفتیم داریم:

$$\begin{aligned} D(a) &= \pi^{**}(v_i).D(a) \qquad (\pi^{**}(v_i) = e) \\ &= \Psi(u_i.a) - \Psi(v_i).a \\ &= a.\Psi(u_i) - \Psi(v_i).a - \Psi(a.v_i - v_i.a) \end{aligned}$$

بنابراین چون $a.v_i - v_i.a \to ۰$ پس داریم:

$$D(a) = \lim_i(a.\Psi(v_i) - \Psi(v_i).a)$$

و نیز از رابطهٔ $\|a.v_i - v_i.a\| \leqslant m\|a\|$ بدست می آوریم که:

$$\|a.\Psi(v_i) - \Psi(v_i).a\| \leqslant \|D(a)\| + \|\Psi\|\|a.v_i - v_i.a\| \leqslant \|D\|\|a\|(m + ۱)$$

پس نتیجه می گیریم که D بطور کراندار تقریباً درونی است. پس $A^\sharp$ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است. □

۱۲.۵ قضیه. جبر باناخ A بطور کراندار تقریباً انقباض پذیر است اگر وتنها اگر تور $(u_i)_{i\in I}$ در K و $M > ۰$ موجود باشند بقسمی که:

(۱). $(k \in K)$ $\quad k.u_i \to k$.

(۲). $(k \in K, i \in I)$ $\quad \|k.u_i\| \leqslant M\|k\|$.

برهان. تنها با یک اصلاحات جزئی در روند اثبات قضیهٔ قبل حکم این قضیه نیز ثابت می شود. □

۱۳.۵ نکته. می دانیم که جبر باناخ A میانگین پذیر است اگر وتنها اگر هستهٔ نگاشت $\pi : (A^\sharp)\hat{\otimes}(A^\sharp)^{op} \to A^\sharp$ دارای همانی تقریبی کراندار باشد. حال با استفاده ازاین واقعیت و قضیه قبل اثبات می شود که:

هر جبر باناخ میانگین پذیر، بطور کراندار تقریباً انقباض پذیر است.

طبق قضیهٔ ۳.۳ که بیان می کند جبر باناخ A میانگین پذیر است اگر و تنها اگر بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر باشد، نتیجه می گیریم که:

هر جبر باناخ بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر بطور کراندار تقریباً انقباض پذیر است. و چون انقباض پذیری، میانگین پذیری را نتیجه میدهد پس داریم:

هر جبر باناخ بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر، بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است.

حال مثالی می آوریم که نشان می دهد عکس مطلب بالا برقرار نمی باشد، یعنی جبر باناخ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیری وجود دارد که بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر نمی باشد.

۱۴.۵ مثال. فرض کنیم $A_n = C^n$ را با نرم $l^۱$ در نظر می گیریم. آنگاه A_n دارای همانی $e_n = (۱, ۱, ...۱)$ است که $\|e_n\| = n$.

بوضوح هر A_n میانگین پذیر است. چون طبق نکتهٔ ۵.۳ هر جبر باناخ جابجایی، انقباض پذیر است اگر وتنها اگربا بعد متناهی باشد، A_n جابجایی وبا بعد متناهی است پس انقباض پذیر است، پس میانگین پذیر نیز می شود.

حال طبق نکتهٔ ۴.۵ $c_{\circ}(A_n^{\sharp})$ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است. حال نشان می دهیم که این جبر بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر نمی باشد (چون A_n همانی دارد پس $A_n^{\sharp} = A_n$).

اگر (f_{λ}) همانی تقریبی برای $c_{\circ}(A_n)$ باشد آنگاه λ ای موجود است بقسمی که:

$\|f_{\lambda}(e_1, e_2, ...) - (e_1, e_2, ...)\| \leqslant 1$ که نرم فوق، نرم sup می باشد.

حال چون f_{λ} متعلق به $c_{\circ}(A_n)$ می باشد پس به شکل $(a_1, a_2, ...)$ می باشد که هر a_i متلق به A_i است. پس داریم:

$$\|a_n e_n - e_n\|_{l^1} \leqslant \sup \|a_n e_n - e_n\|_{l^1} \leqslant 1$$

بنابراین برای هر n از N داریم:

$$n - 1 \leqslant \|a_n e_n\|_{l^1} \leqslant \|a_n\|_{l^1}$$

پس نتیجه می گیریم که $\|f_{\lambda}\| = \infty$ چون $\|f_{\lambda}\| = \sup \|a_n\|_{l^1}$.

اما قضیهٔ 4.2 از [12] بیان میکند که اگر A جبر باناخ بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر باشد آنگاه A دارای یک همانی تقریبی کراندار می باشد.

حال اگر $c_{\circ}(A_n)$ بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر باشد قضیهٔ بالا را نقض می کند. پس $c_{\circ}(A_n)$ یک جبر باناخ بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است که بطور یکنواخت تقریباً میانگین پذیر نیست.

فصل ٦

میانگین پذیری تقریبی جمع های مستقیم و وجود همانی های تقریبی

رابطهٔ نزدیکی بین وجود همانی های تقریبی در جبرهای باناخ تقریباً میانگین پذیر و میانگین پذیری تقریبی جمع مستقیم این جبرهای باناخ موجود است، به عنوان مثال در [12] قضیه ای داریم به این شرح:

۱.۶ قضیه. فرض کنیم B, A جبرهای باناخ تقریباً میانگین پذیر باشند و هر کدام از اینها دارای همانی تقریبی کراندار می باشند، آنگاه $A \oplus B$ تقریباً میانگین پذیر می باشد.

برهان. [12]. $\square$

حال در اینجا ما صورت بهتری از این قضیه را بیان می کنیم و به اثبات آن می پردازیم. در واقع ملزومات قضیه برای تقریباً میانگین پذیری $A \oplus B$ را کم تر می کنیم.

۲.۶ نکته. جمع و ضرب روی $A \oplus B$ را نقطه وار در نظر می گیریم و برای $(a,b) \in A \oplus B$ نرم را این گونه تعریف می کنیم $\|(a,b)\| := max\{\|a\|, \|b\|\}$.

۳.۶ قضیه. فرض کنیم B, A جبرهای باناخ تقریباً میانگین پذیر باشند. فرض کنیم که یکی از A یا B دارای همانی تقریبی کراندار باشند، آنگاه $A \oplus B$ تقریباً میانگین پذیر است.

برهان. فرض کنیم X یک $A \oplus B$ — مدول دو طرفهٔ باناخ و $D: A \oplus B \to X^*$ یک مشتق پیوسته باشد.

فرض کنیم (b_α) یک همانی تقریبی کراندار از B است. بدون از دست دادن کلیت فرض می کنیم که، $\xi = \omega^* - \lim D(b_\alpha)$ و $E = \omega^* - \lim_\alpha b_\alpha$ که ξ عضو X^{***} و E عضو B^{**} است.

طبق [3] X^{***} یک $(A \oplus B)^{**} = A^{**} \oplus B^{**}$— مدول دو طرفهٔ باناخ می باشد. حال عمل مدولی $A \oplus B$ روی X^{***} را به عمل $A^\sharp \oplus B$ روی X^{***} با تعریف زیر گسترش می دهیم:

$$e_A.F = F - E.F \qquad , \qquad F.e_A = F - F.E \qquad (F \in X^{***})$$

که در اینجا e_A همانی A می باشد.

چون X^* در X^{***} چگال است D را مشتقی از $A \oplus B$ بتوی X^{***} در نظر می گیریم و D را به مشتقی از $A^\sharp \oplus B$ به X^{***} گسترش می دهیم، که در آن $D(e_A) = -\xi$.
حال ثابت می کنیم که بعد از این گسترش، D هنوز هم یک مشتق است. a متعلق به A را در نظر می گیریم:

$$a.D(e_A) + D(a).e_A = -a.\xi + D(a) - D(a).E$$
$$= D(a) - \omega^* - \lim_\alpha D(ab_\alpha)$$
$$= D(a) = D(ae_A)$$

البته $D(ab_\alpha) = 0$ برای هر α، چون دامنهٔ D، $A^\sharp \oplus B$ است a را با $(a, 0)$ و b_α را با $(0, b_\alpha)$ یکی در نظر می گیریم، بدست می آوریم $a.b_\alpha = (a, 0)(0, b_\alpha) = (a0, 0b_\alpha) = (0, 0)$ پس $D(0, 0) = 0$.

حال طبق قضیهٔ ۱.٦ چون $A^\sharp$ دارای همانی تقریبی کراندار است (یک تور که تمام جملاتش e_A است) و B نیز یک همانی تقریبی کراندار دارد، پس $A^\sharp \oplus B$ تقریباً میانگین پذیر است.

پس طبق قضیهٔ ۵.۲، $A^\sharp \oplus B$ تقریباً انقباض پذیر است. بنابراین D توسعه یافته شده تقریباً درونی است. بنابراین تور (F_i) در X^{***} موجود است که:

$$D(a, b) = \lim_i((a, b).F_i - F_i.(a, b)) \qquad (a \in A\ ,\ b \in B)$$

حال تصویر کانونی را از X^{***} به X^* به دو طرف معادلهٔ بالا اثر می دهیم و بدست می آوریم که D تقریباً درونی است. بنابراین $A \oplus B$ تقریباً میانگین پذیر است. □

۴.٦ قضیه. فرض کنیم B, A جبرهای باناخ تقریباً میانگین پذیر باشند، آنگاه برای هر $A \oplus B-$ مدول دو طرفهٔ باناخ شبه یکانی مثل X($X = (A \oplus B).X.(A \oplus B)$) مشتق پیوسته از $A \oplus B$ بتوی X^* بطور ω^*- تقریباً درونی است.

برهان. فرض کنیم $D : A \oplus B \to X^*$ یک مشتق پیوسته باشد، آنگاه D مشتق های پیوستهٔ $D_1 : A \to X^*$ با ضابطهٔ $D_1(a) = D(a, 0)$ و $D_2 : B \to X^*$ با ضابطهٔ

$D_۲(b) = D(۰, b)$ را القاء می کند.

چون B, A تقریباً میانگین پذیر هستند، تورهای (ξ_i) و (ζ_i) در X^* موجودند بقسمی که:

$$D_۱(a) = \lim_i((a, ۰).\xi_i - \xi_i.(a, ۰)) \qquad (a \in A) \qquad (۱۳)$$

$$D_۲(b) = \lim_i((۰, b).\zeta_i - \zeta_i.(۰, b)) \qquad (b \in B) \qquad (۱۴)$$

حال طبق لم 2.2 از [12] که بیان می کند اگر جبر باناخ A تقریباً میانگین پذیر باشد آنگاه A دارای همانی تقریبی چپ و راست است، فرض کنیم (l_α^A) و (r_α^A) به ترتیب همانی های تقریبی چپ و راست از A باشند و نیزهمچنین فرض کنیم (l_α^B) و (r_α^B) به ترتیب همانی های تقریبی چپ و راست برای B باشند.

داریم:

$$(a, ۰) = \lim_\alpha(a, b)(r_\alpha^A, ۰) = \lim_\alpha(l_\alpha^A, ۰)(a, b) \qquad (a \in A, b \in B)$$

$$(۰, b) = \lim_\alpha(a, b)(۰, r_\alpha^B) = \lim_\alpha(۰, l_\alpha^B)(a, b) \qquad (a \in A, b \in B)$$

این دو معادله به همراه معادلات (۱۳) و (۱۴) نتیجه میدهند که تورهای (ϕ_v) و (ψ_v) در X^* موجودند بقسمی که

$$D(a, b) = D_۱(a) + D_۲(b) = \lim_v((a, b).\phi_v - \psi_v.(a, b)) \qquad (a \in A, b \in B)$$

چون D یک مشتق است پس،

$$D[(a, b).(c, d)] = D(a, b).(c, d) + (a, b).D(c, d) \qquad (a, c \in A, b, d \in B)$$

$$= \lim_v[(a, b).\phi_v - \psi_v.(c, d)].(c, d) + (a, b). \lim_v[(c, d).\phi_v - \psi_v.(c, d)]$$

$$= \lim_v[(a, b).(\phi_v - \psi_v)(c, d)] + \lim_v[(a, b).(c, d).\phi_v - \psi_v.(a, b).(c, d)]$$

پس نتیجه می گیریم که:

$$\lim_v[(a,b).(\phi_v-\psi_v).(c,d)]=0 \qquad (a,c\in A, b,d\in B)$$

بنابراین داریم:

$$D(a,b).(c,d)=\lim_v[(a,b).\psi_v-\psi_v.(a,b)].(c,d) \qquad (a,c\in A, b,d\in B) \ (۱۵)$$

چون X یک $A\oplus B$ — مدول دو طرفه وباناخ و شبه یکانی است از عبارت بالا نتیجه می گیریم که:

$$D(a,b)=\omega^*-\lim_v[(a,b).\psi_v-\psi_v.(a,b)] \qquad (a\in A, b\in B)\ ,\ (۱۶)$$

بنابراین D بطور ω^* — تقریباً درونی است.

توضیح اینکه چگونه (۱۵) رابطهٔ (۱۶) را نتیجه می دهدبه شرح زیر است. فرض کنید $\psi_v=(a,b).\psi_v-\psi_v.(a,b)$ پس $D(a,b).(c,d)=\lim_v(\psi_v).(c,d)$. می خواهیم نتیجه بگیریم که $D(a,b)=\omega^*-\lim_v(\psi_v)$. اما این تساوی به معنی زیر است که برای هر x متعلق به X

$$<x,D(a,b)>=\lim_v<x,\psi_v>$$

چون X در تساوی $X=(A\oplus B).X.(A\oplus B)$ صدق می کند(X شبه یکانی است) پس برای x از X داریم، $x=a_1.z.b_1$ که $a_1\in A\oplus B$ و $b_1\in A\oplus B$ و $z\in X$.

داریم:

$$<x,D(a,b)>=<a_1.z.b_1,D(a,b)>=<z,b_1.D(a,b).a_1>$$

بنا بر پیوستگی ضرب و اینکه رابطهٔ بالا برای هر عضو از $A\oplus B$ برقرار است داریم:

$$<z,b_1.D(a.b).a_1>=\lim_v<z,b_1.\psi_v.a_1>$$

$$= \lim_v < a_1.z.b_1, \psi_v >= \lim_v < x, \psi_v >$$

از طرفی چون $< z, b_1.D(a,b), a_1 >=< x, D(a,b) >$ پس:

$$< x, D(a,b) >= \lim_v < x, \psi_v >$$

پس، $.D(a,b) = \omega^* - \lim_v(\psi_v)$ □

۵.۶ قضیه. اگر $A \oplus A$ تقریباً میانگین پذیر باشد، آنگاه A دارای همانی تقریبی دو طرفه است.

برهان. فرض می کنیم $X = A$ و با تعریف زیر X را تبدیل به یک $A \oplus A$—مدول دو طرفهٔ باناخ می کنیم:

$$(a,b).x = a.x \qquad , \qquad x.(a,b) = x.b \qquad (x \in X, a, b \in A)$$

در اینصورت $D : A \oplus A \to X$ با ضابطهٔ $D(a,b) = a - b$ یک مشتق است، بنابراین چون $A \oplus A$ تقریباً میانگین پذیر است پس طبق قضیهٔ ۵.۲، $A \oplus A$ تقریباً انقباض پذیر است، تور (x_i) در X موجود است بقسمی که:

$$D(a,b) = a - b = \lim_i[(a,b).x_i - x_i.(a,b)] \qquad (a, b \in A)$$

پس:

$$a - b = \lim_i(a.x_i - x_i.b) \qquad (a, b \in A)$$

به خصوص اگر $b = 0$ داریم، $a = \lim_i a.x_i$ و اگر $a = 0$ داریم، $b = \lim_i x_i b$.
بنابراین تور (x_i) یک همانی تقریبی دو طرفه است. □

فرض می کنیم A یک جبر باناخ تقریباً میانگین پذیر است، پس طبق [12]، A دارای یک همانی تقریبی یک طرفه است. حال شرایطی روی A ایجاد می کنیم که A دارای

یک همانی تقریبی دو طرفه شود.

فرض کنیم τ توپولوژی تولید شده بوسیلهٔ نیم نرم های $P_a : A \to R$ با ضابطهٔ $P_a(b) = \|ab\|$ باشد که $b \in A$.

٦.٦ لم. فرض کنیم که A دارای یک همانی تقریبی چپ (راست) ضعیف است، آنگاه A دارای یک همانی تقریبی چپ (راست) می باشد.

توجه کنید که تور (a_α) در A رایک همانی تقریبی چپ ضعیف گوئیم اگر برای هر f از A^* و b از A داشته باشیم، $f(a_\alpha b) \to f(b)$.

برهان. لم 2.1 از [12]. $\square$

٧.٦ قضیه. فرض کنیم که A تقریباً میانگین پذیر است و τ از توپولوژی ضعیف روی A قویتر است (یعنی $\tau_\omega \subseteq \tau$). آنگاه A دارای یک همانی تقریبی دو طرفه است.

برهان. فرض کنیم $X = A$ به عنوان یک $A \oplus A-$ مدول دو طرفهٔ باناخ با ضرب تعریف شده در قضیهٔ ٥.٦ باشد.

در قضیهٔ ٤.٦ مشاهده کردیم که برای مشتق $D : A \oplus A \to X$، تور (ψ_v) در X موجود است بقسمی که:

$$D(a,b).(c,d) = \lim_v[(a,b).\psi_v - \psi_v.(a,b)].(c,d)$$

معادلهٔ بالا را بر مشتق D با ضابطهٔ زیر اعمال می کنیم، $D(a,b) = a - b$ بدست می آوریم:

$$(a-b).d = \lim_v(a.\psi_v - \psi_v.a).d$$

این معادله به این معنی است که برای هر $\epsilon > ۰$ از مرحله ای به بعد در تور (ψ_v)

داریم:

$$\|[(a-b)-(a.\psi_v-\psi_v.b)].d\|<\epsilon$$

و این نشان می دهد که $a.\psi_v-\psi_v.b$ در توپولوژی τ به $(a-b)$ میل می کند (از P_d استفاده شد). حال چون $\tau_\omega\subseteq\tau$ ، پس برای هر همسایگی از $a-b$ مثل V در توپولوژی τ_ω بدست می آوریم که $V\in\tau$، پس:

$$a-b=weak-\lim_v(a.\psi_v-\psi_v.b)$$

بنابراین (ψ_v) یک همانی تقریبی ضعیف دو طرفه می‌باشد. بنابر لم ٦.٦ یک همانی تقریبی دو طرفه برای A بدست می آوریم. پس A دارای یک همانی تقریبی دو طرفه است. □

٨.٦ قضیه. فرض کنیم $span\{aa^*: a\in A, a^*\in A^*\}$ در A^* چگال است به‌طوری که A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است ،یااینکه $span\{aa^*: a\in A, a^*\in A^*\}$ در A^* چگال است و A بطور کراندار تقریباً انقباض پذیر است، آنگاه A دارای همانی تقریبی دو طرفه است.

برهان. فرض کنبم دو شرط اول از قضیه برقرارند و $D: A\oplus A\to X=A$ یک مشتق است. طبق قضیهٔ گلدشتاین چون X در X^{**} با توپولوژی ω^* چگال است پس D را تابعی از $A\oplus A$ بتوی X^{**} در نظر می گیریم پس $D: A\oplus A\to X^{**}$.

مانند قضیهٔ ٤.٦، تور (ξ_v) در X^{**} موجود است بقسمی که

$$D(a,b).c=\lim_v(a.\xi_v-\xi_v.b).c$$

و بعلاوه $(a.\xi_v-\xi_v.b)$ برای هر a,b از A، کراندار است(طبق فرض روی A).

به‌ازای هر c از A و هر c^* از A^* داریم

$$< D(a,b), cc^* >= \lim_v < a.\xi_v - \xi_v.b, cc^* >$$

و از این رو برای جمع های متناهی $c_1c_1^* + c_2c_2^* + ... + c_kc_k^*$ برقرار است. اما چون $(a.\xi_v - \xi_v.b)$ کراندار است و چون $span\{aa^* : a \in A, a^* \in A^*\}$ در A^* چگال است، پس:

$$D(a,b) = \omega^* - \lim_v(a.\xi_v - \xi_v.b)$$

و یا اینکه $a - b = \omega^* - \lim_v(a.\xi_v - \xi_v.b)$. که دوباره مثل قضیهً قبل و با توجه به لم ٦.٦ یک همانی تقریبی دو طرفه برای A بدست می آید.

قسمت دوم قضیه نیز به همین صورت اثبات می شود ولی در آنجا D را بتوی X در نظر می گیریم که اثبات راحتر است. □

٩.٦ نکته. اگر A^* با اعمال معمولی مدولی اساسی[1] باشد (یعنی $A^* = \overline{A.A^*.A}$) شرط اول در قضیهً ٨.٦ برقرار می شود، چون

$$< D(a), b.a^*.c >= \lim_v < \phi_v, b.a^*.c >$$

که داریم، $a^*.c \in A^*$ و چون

$$\{b.a^*.c : b, c \in A, a^* \in A^*\} \subseteq \{aa^* : a \in A, a^* \in A^*\}$$

و $A^* = \overline{A.A^*.A}$، پس به جای شرط اول در قضیهٔ ٨.٦ از این شرط که A^* اساسی است نیز استفاده کرد.

قضیهٔ ٨.٦ برقرار است وقتی که A تقریباً میانگین پذیر و انعکاسی باشد، زیرا اگر

---

[1] *essential*

(e_i) یک همانی تقریبی راست برای A باشد، داریم:

$$< a, a^* >= \lim_i < a^*, ae_i >= \lim_i < e_i a, a >$$

حال چون $A^{**} \cong A$ (A انعکاسی است) پس $\overline{span}^{\omega^*}\{cc^*\} = A$ و از این رو طبق قضیهٔ مزور با نرم در A^{**} چگال است.

هر چند تا کنون هیچ مثالی از یک جبر باناخ تقریباً میانگین پذیر انعکاسی نامتناهی بعد شناخته نشده است، حتی در [11] در مورد جبرهای باناخ میانگین پذیر انعکاسی حدس زده شده که این نوع جبرها متناهی بعد می باشند.

۶.۱۰ قضیه. فرض کنیم $M = cl(span\{aa^* : a \in A, a^* \in A^*\})$. فرض کنیم A بطور کراندار تقریباً میانگین پذیر است و فرض کنیم M بوسیلهٔ یک زیر مدول در A^* تکمیلی می شود (یعنی زیر مدولی مثل N از A^* موجود است که $A^* = M \oplus N$) آنگاه A دارای یک همانی تقریبی دو طرفه می باشد.

برهان. فرض کنیم که N یک زیر مدول تکمیل کنندهٔ M باشد یعنی $A^* = M \oplus N$. با توجه به تعریف M ، عمل چپ A، N را پوچ می کند، یعنی برای a از A و n از N داریم، $a.n = ۰$. چون اگر $a.n \neq ۰$ آنگاه $M \cap N \neq ۰$ که متناقض با $A^* = M \oplus N$ می باشد.

حال فرض می کنیم $D : A \oplus A \to A^{**}$ با ضابطهٔ $D(a, b) = a - b$ تعریف شده است.

$A^* = M \oplus N$ پس $A^{**} = M^* \oplus N^*$ و نیز فرض کنیم $\varphi : A^{**} \to \frac{A^{**}}{N^*}$ نگاشت خارج قسمتی باشد.

چون $M^* \cong \frac{M^*}{\circ} \cong \frac{M^*}{M^* \cap N^*} \cong \frac{M^* \oplus N^*}{N^*} = \frac{A^{**}}{N^*}$ پس برد φ را M^* در نظر می گیریم، یعنی $\varphi : A^{**} \to M^*$.

φD و $(I-\varphi)D$ به ترتیب مشتقهایی به توی M^* و N^* می باشند.

برای اثبات مشتق بودن φD و $(I-\varphi)D$ ابتدا باید ثابت کنیم که $M^* \cong \frac{A^{**}}{N^*}$ و $N^* \cong \frac{A^{**}}{M^*}$ هر دو یک $A \oplus A-$ مدول دو طرفه می باشند.

A^{**} را با ضرب $(a.b).a^{**} = a.a^{**}$ و $a^{**}.(a,b) = a^{**}.b$ به یک $A \oplus A-$ مدول دو طرفه تبدیل می کنیم.

ضرب $\frac{A^{**}}{N^*}$ را این گونه تعریف می کنیم:

$$(a,b).(a^{**}+N^*) := a.a^{**}+N^* \qquad , \qquad (a^{**}+N^*)(a,b) := a^{**}.b+N^*$$

به وضوح ثابت می شود که φD و $(I-\varphi)D$، مشتق می باشند .

چون عمل چپ A روی N صفر است، پس عمل راست A روی N^* نیز صفر می شود.

چون A تقریباً میانگین پذیر است پس دارای یک همانی تقریبی راست است. پس $(I-\varphi)D$ تقریباً درونی است ((a_α) در A یک همانی راست است پس، $(I-\varphi)D(a,b).(a_\alpha + M^*) \to (\text{I-}\varphi)D(a,b)$).

از طرفی برای $\varphi D : A \oplus A \to M^*$ نیز طبق قضیهٔ ۸.٦ داریم، تور (ξ_i) در M^* موجود است بقسمی که:

$$\varphi D(a,b) = \omega^* - \lim_i[(a,b).\xi_i - \xi_i.(a,b)] \qquad (a,b \in A)$$

بنابراین چون $D = (I-\varphi)D + \varphi D$ پس D بطور ω^*- تقریباً درونی است.

بنابراین مثل قضایای قبل A دارای یک همانی تقریبی دو طرفه می باشد. $\square$

[**پایان**]

فصل ۷

پیوست

واژه نامه

$A-$مدول دو طرفه.. $A-bimodule$

همانی تقریبی .... $Approximate\ Identity$

میانگین پذیر تقریبی .... $Approximately\ Amenable$

تقریباً درونی .... $Approximately\ inner$

خاصیت تقریب .... $Approximation\ Property$

متعارف (کانونی) .... $Canonical$

کامل شده .... $Complemented$

مشتق .... $Derivation$

مشتق درونی .... $Inner\ Derivation$

جهت دار .... $Directed$

دوگان .... $Dual$

بروریختی .... $Epimorphism$

هم ارز .... $Equivalent$

همانی چپ .... $Left\ Identity$

همریختی .... $Homomorphism$

خودتوان .... $Idempotent$

وارون .... $Inverse$

یکریختی .... $Isomorphism$

عملگر ضرب .... $Multiplication\ Operator$

تور .... Net

نرم .... $Norm$

توان .... $Power$

تصویر .... $Projection$

مراجع

[1] . F.F.Bonsall,J.Duncan,Complete Normed Algebras , Springer - Verlag New York ,1973 .

[2] . H.G.Dales,Banach Algebras and Automatic Continuity,Clarendon Press,Oxford,2000.

[3] . H.G.Dales,F.Ghahramani,N.Gronbak,Derivation into iterated duals of Banach algebras,Studia Math.128(1998) 19-54.

[4] . H.G.Dales,A.T.M.Lau,D.Strauss Banach algebras on semigroups and their compactification,Mem.Amer.Math.Soc.(2008)1-201

[5] . H.G.Dales,R.J.Loy,Zhang,Approximate Amenability for Banach sequence algebras,Studia Math,177(2006) 81-96.

[6] . M.M.Day,Amenable semigroup,Illinois J.Math 1(1957) 509-544.

[7] . R.S.Doran,J.Wichman,Approximate Identities and Factorization in Banach Modules,Lecture Note in Math.Vol.768.Springer-Verlag ,New York 1976.

[8] . J.Duncan , I.Namioka,Amenability of inverse semigroups and their semigroup algebras,Proc.Roy,Soc.Edinburgh sect,A80 (1978) 309-321.

[9] . J.Duncan,A.L.T Paterson,Amenability for discrete convolution semigroup algebra,Math.Scand.66(1990) 141-146.

[10] . J.Feinstein,Strong Ditkin algebras without bounded relative units Int,J.Math.Sci.22(1990) 437-443.

[11] . J.Gale,T.J.Ransford,M.C,White,Weakly compact homomorphism, Trans.Amer,Math,Soc.331(1992) 815-824.

[12] . F.Ghahramani,R.J.Loy ,Generalized notion of amenability. J.Funct.Anal.208(2004) 229-260.

[13] . F.Ghahramani,R.J.Loy,Y.Zhang ,Generalized notion of amenability, II.J.Funct.Anal.254(2008) 1776-1810.

[14] . F.Ghahramani,R.Stoke,Approximate and pseudo-amenability of the Fourier algebra A(G).Indiana Univ.Math.J (2007) 909-930.

[15] . F.Ghahramani,Y.Zhang,Pseudo-amenable and pseudo-contactible Banach algebras,Math.Proc.Cambridge Philos,Soc 142(2007) 111-123.

[16] . F.Gourdeau,Amenability of Lipschitz algebras,Math. Proc.Cambridge Philos,Soc.112(1992) 581-588.

[17] . A.Ya.Helemskii,The Homology of Banach and Topologiacal Algebras,Kluwer ,Dordrecht,1989.

[18] . B.E.Johnson,Cohomology in Banach algebras,Mem.Amer.Math.Soc.127(1972).

[19] . M.Lashkarizadeh,H.Samea,Approximate amenability of certain semigroup algebras,Semigroup Forum 71(2005) 312-322.

[20] . K.A.L.White ,Amenability and ideal structure in some Banach sequence algebras.J.London.Math.Soc.68(2002) 444-460.

[21] . P.C.Curtis,The Structure of The Amenable Banach Algebras.

[22] . Volker Runde,Lectures on amenability,Springer 2002.

[۲۳] . آنالیز تابعی، والتر رودین، ترجمهٔ دکتر علی اکبر عالم زاده ، نشر علوم نوین ، چاپ اول اسفند ۱۳۸۲ .

Abstract

This thesis based upon the following paper :

F.Ghahramani,R.J.Loy ,Generalized notion of amenability.

J.Funct.Anal.208(2004) 229-260.

In this thesis we investigate the notion of approximate amenability, contractibility and their relations.

Keywords

Amenable Banach algebra, Approximately amenable Banach algebra, Approximate identity, Derivation.